

## 第2学年数学科 数学Ⅱ 学習指導案

### 1 単元名

高次方程式

### 2 単元の目標

- ・ 数を複素数まで拡張する意義を理解し、複素数の四則計算をすること。
- ・ 因数定理について理解し、簡単な高次方程式について因数定理などを用いてその解を求めること。
- ・ 式の計算の方法を既に学習した数や式の計算と関連付け多面的に考察すること。
- ・ 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、方程式を問題解決に活用すること。

### 3 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> <li>● 数を複素数まで拡張する意義を理解し、複素数の四則計算をすることができる。</li> <li>● 因数定理について理解し、簡単な高次方程式について因数定理などを用いてその解を求めることができる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 式の計算の方法を既に学習した数や式の計算と関連付け多面的に考察することができる。</li> <li>● 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、方程式を問題解決に活用することができる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとするとともに、問題解決過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。</li> </ul>

### 4 指導計画

パフォーマンス課題を取り入れた取組

・ 家庭学習での取組

時	学習活動	学習のねらい
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 剰余の定理を用いて、整式を一次式や二次式で割った余りを求める。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ <math>x</math> の整式 <math>P(x)</math> を <math>x</math> の一次式 <math>x - k</math> で割った余りが定数となる剰余の定理について理解することができる。</li> <li>・ 剰余の定理を用いて、<math>x</math> の整式 <math>P(x)</math> を <math>x</math> の二次式で割った余りを求めることができる。</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 剰余の定理から因数定理を導出する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ <math>x</math> の整式 <math>P(x)</math> を <math>x</math> の一次式 <math>x - k</math> で割った余りが0となるとき、<math>x</math> の整式 <math>P(x)</math> は一次式 <math>x - k</math> を因数にもつこと(因数定理)を理解することができる。</li> <li>・ 因数定理を用いて三次または四次の整式を因数分解することができる。</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 組立除法の原理について理解する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 整式の係数のみを用いて <math>x</math> の整式 <math>P(x)</math> を <math>x</math> の一次式 <math>x - k</math> で割った余りを求めることができる。</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 因数分解を用いて高次方程式を解く。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 数学Ⅰで学習した因数分解の公式や手法を用いて、三次または四次の高次方程式を解くことができる。</li> <li>・ 1の三乗根 <math>\omega</math> の性質について理解を深めることができる。</li> </ul>

5	●因数定理を用いて高次方程式を解く。	・因数定理を利用して因数分解することで、三次または四次の高次方程式を解くことができる。
6	●高次方程式と虚数解の関係について理解する。	<ul style="list-style-type: none"> <li>・実数係数の方程式において、共役な複素数がともに解となることを理解することができる。</li> <li>・高次方程式の「別解を考える会話例」を読み解き、言語活動を充実させることで、家庭学習のレポート課題につなげる。</li> </ul>
・第6時終了後、ルーブリックを基にしながら家庭学習で別解づくりのレポート課題に取り組み、単元全体を振り返る。		
7	●単元のまとめのパフォーマンス課題に取り組む。	<ul style="list-style-type: none"> <li>・家庭学習で作成したレポートを生徒同士で相互評価を行い、作成したレポートの問題や解答をよりよいものに修正することで、「数学の事象」を数学化する。</li> </ul>
・第7時での、生徒同士の相互評価を基に、自らが作成した別解の修正を行う。その際「数学探究ノート」にパフォーマンス課題に取り組んだ過程の振り返りを行う。		

第6時（高次方程式と虚数解の関係について理解する）の展開例

■は、評価規準を表す。

◎学習のねらい

- ・実数係数の方程式において、共役な複素数がともに解となることを理解することができる。
- ・高次方程式の「別解を考える会話例」を読み解き、言語活動を充実させることで、家庭学習のレポート課題につなげる。

◎パフォーマンス課題に取り組む際の本質的な問い

- ・高次方程式を解くときには、どのような方法が考えられるのだろうか？

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項
15分	◇「数学探究ノート」の課題1に取り組む。 ●様々な視点から一度学んだ問題を見つめてみよう。		・既習の問題をスモールステップで捉え直し、生徒個人の考えを深めるために、個人で考える時間をもつ。
<p>課題1 次の問題の解答例は以下のとおりである。①～⑤の過程について次のページの問いに答えなさい。                      「<math>a, b</math> は実数とする。3次方程式 <math>x^3 - 3x^2 + ax + b = 0</math> の1つの解が <math>1 + 2i</math> であるとき、実数 <math>a, b</math> の値を求めよ。また、他の解を求めよ。」</p>			
<p><b>解答</b> <math>1 + 2i</math> がこの方程式の解であるから、  ①</p> $(1 + 2i)^3 - 3(1 + 2i)^2 + a(1 + 2i) + b = 0$ <p>これを展開して整理すると、  ②</p> $(a + b - 2) + (2a - 14)i = 0$ <p><math>a + b - 2, 2a - 14</math> はともに実数であるから、  ③</p> $a + b - 2 = 0 \text{ かつ } 2a - 14 = 0$ <p>これを解いて、<math>a = 7, b = -5</math></p> <p>このとき、もとの方程式は、<math>x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0</math>  ④</p> <p>左辺を因数分解すると、<math>(x - 1)(x^2 - 2x + 5) = 0</math>  ⑤</p> <p>したがって、<math>x - 1 = 0</math> または <math>x^2 - 2x + 5 = 0</math></p> <p>これより、<math>x = 1</math> または <math>x = 1 \pm 2i</math></p> <p>よって、他の解は、<math>x = 1, 1 - 2i</math></p>			
<p>●解答の①の部分が成り立つ理由を書きなさい。</p>		<p>☆ <math>x = \alpha</math> が方程式 <math>P(x) = 0</math> の解のとき、<math>P(\alpha) = 0</math> が成立するから。</p>	<p>・方程式の解の意味を確認することで、理由や根拠を基に条件を用いることを意識できるようにする。</p>

<p>5分</p> <p>5分</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●解答の②の計算を実際に行いなさい。</li> <li>●解答の③は複素数のどんな性質を用いているか説明しなさい。</li> <li>●解答の④の因数分解を実際に行いなさい。</li>   <li>●解答の⑤の理由・根拠を説明しなさい。</li> </ul> <p>◇「数学探究ノート」の課題1に記述した解答を説明、質問する。</p> <p>◇「数学探究ノート」の課題2に取り組む。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>●下の会話文を読んで、課題2-①を個人で考えてみよう。</li> <li>●自分の考えをペアになって説明してみよう。</li> </ul>	<p>☆ <math>(a + b)^3</math> の展開公式がうまく使えない。</p> <p>☆ <math>p, q</math> を実数とすると、  <math>p + qi = 0 \Leftrightarrow p = 0</math> かつ <math>q = 0</math></p> <p>☆ 因数が見つからない。  ☆ 因数を見つけてもどうしてよいか分からない。</p> <p>☆ 因数定理を用いて、<math>x - 1</math> を因数にもつことを確認した後、割り算を実際に行ったり、係数比較をしたりして因数分解を行う。</p> <p>☆ <math>A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0</math> または <math>B = 0</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・展開公式と複素数の計算規則を確認する。</li> <li>・複素数の相等を用いるとき、係数部分の実数であることが根拠となることを確認する。</li> <li>・因数定理を忘れていた場合には、全体で確認する。</li>   <li>・机間指導によって係数比較により因数分解を行う生徒の割合を把握し、場合によっては黒板で説明を行う。</li>   <li>・「または」と「かつ」の混同に注意する。</li>   <li>・複数の考えに触れることができるように、4人グループになるように指示をする。</li> <li>・解答例③や⑤など答えにくいものは教科書を参考にし、自分で定式化するように促す。</li>   <li>・生徒自ら解と係数の関係に気付くことができるように、個人で考える時間を確保する。</li> </ul>
---------------------	---	--	---

**課題2**      **先生と太郎さんと花子さんは、課題1について話している。3人の会話を読んで、下の問いに答えよ。**

**(会話前半)**

太郎さん①:「なんだか代入して計算するのは、展開するとき計算ミスをして間違える可能性も高いし面倒くさいから嫌だな」

花子さん①:「教科書に実数係数の  $n$  次方程式で  $1 + 2i$  が解ならその共役な複素数  $1 - 2i$  も解になると書いてあったよ」

太郎さん②:「共役な複素数  $1 - 2i$  を代入しても同じ答えがでるはずだね。でも、せっかく解が2数も分かっているのだから、何か他の解き方もあるのではないかな？」

花子さん②:「2数の解が分かっているなら、2次方程式(\*)ならつくれるね？」

**課題2-①**    **(\*)の2次方程式を求めてみよう。**

$1 + 2i$  がこの方程式の解であるから、共役複素数  $1 - 2i$  も解となる。  
よって、2数が解より、 $x^2 - 2x + 5 = 0$

5分	<p>●会話文を読んで、課題2-②を個人で考えてみよう。</p>		<p>・生徒自らが高次方程式と、因数分解の関係について考えを深めることができるように個人で考える時間をもつ。</p>
	<p><b>(会話後半)</b>  花子さん③：「この2次方程式と問題文の3次方程式はどんな関係(**)にあるのだろうか」</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p><b>課題2-② (**)の関係を考えてみよう。</b></p> <p style="text-align: center;">3次方程式 <math>x^3 - 3x^2 + ax + b = 0</math> の左辺は <math>x^2 - 2x + 5</math> を因数にもつ。</p> </div> <p>太郎さん③：「それなら、いろいろと方法が考えられるね」  花子さん④：「課題1の解答例と比べてみると、実際に割り算をしてみてもいいね」  太郎さん④：「もう一つの解を <math>p</math> と置いて、係数を比較するとか」  花子さん⑤：「それぞれの方法を試してみよう」  先生①：「2人ともいい点に気づいたね。他にも3次方程式の解と係数の関係を用いても解くことができるよ。興味のある人はやってみよう」</p>		
10分	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <p><b>課題2-③ 課題1の別解につながるような、太郎さん、花子さん、先生の発言番号を取り上げ、具体的なアイデアを書いたり、計算を行ったりしてみよう。</b></p> </div>		
	<p>●ここで課題2-③を考えます。それぞれの生徒や先生の発言を基に課題1の解答を様々な角度から考えてみたいと思います。誰のどの発言が別解につながるか考えてみよう。</p> <p>◇アイデアや計算を「数学探究ノート」に記述する。</p> <p>●「数学探究ノート」のメモ欄にアイデアや実際の計算を書いてみよう。</p>	<p>☆太郎さんの発言②かな。  ☆花子さんの発言④かな。  ☆太郎さんの発言④かな。</p> <p>☆実際に割り算をしてみる。  ☆割り算をしてみると余りがでてきたな。  ☆もう一つの方法では式を展開してみたが、どのように考えればよいのだろう。</p>	<p>・全体に問いかけながら、数名の生徒を指名する。その際に、太郎さんや花子さんの発言がどのような数学的な表現につながるか考えるように促す。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>■：<b>愚</b>式の計算の方法を既に学習した数や式の計算と関連付け多面的に考察することができる。  『学習活動の観察・数学探究ノートの分析』</p> </div> <p>・自分の考えをもち、グループ学習につなげるために個人で考える時間をもつ。  ・整式の割り算の方法を忘れた場合、生徒を指名し、黒板で確認する。</p>

<p>10分</p>	<p>◇グループ内で話し合う。</p> <p>●「割り算をしてみるとか、もう一つの解を<math>p</math>と置いて、係数を比較するとか。」を解答に生かす方法について、4人グループの中で意見を交流しよう。</p> <p>●4人グループで、参考にする人物と発言番号を決めて「数学探究ノート」のレポート課題に家庭学習で取り組んでみよう。</p>	<p>☆割り算で出てきた余りは <math>(a-7)x+b+5</math> となるが、これは恒等的に0になると考えると恒等式で考えるとよいな。</p> <p>☆もう一つの解を <math>p</math> と置いて考えたが、ここからどのように考えたらよいのか分からない。</p>	<p>・解から方程式をどのように導出したか確認する。</p> <p>・ <math>(a-7)x+b+5=0</math> が <math>x</math> の恒等式か方程式か生徒が戸惑う場合は、「全ての <math>x</math> で成立する等式が恒等式」「ある <math>x</math> で成立する等式が方程式」であることを確認する。</p> <p>・言語活動が停滞しているときは、「言語活動を行う際の着眼点」を用いるように促す。</p> <div style="border: 2px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>①「理由や根拠を質問・説明する」</p> <p>②「比較・関連付けて質問・説明する」</p> <p>③「新たな視点から捉え直して質問・説明をする」</p> </div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>■：<b>知</b>数を複素数まで拡張する意義を理解し、複素数の四則計算をすることができる。</p> <p>『学習活動の観察・数学探究ノートの分析』</p> </div> <p>・次の時間に、ルーブリックに従ってレポートの相互評価を行うことを指示する。</p>
------------	---	---	---

**準備物**

- ・「数学探究ノート」

第6時と第7時の間の家庭学習

■は、評価基準を表す。

◇学習活動	・指導上の留意点
◇「数学探究ノート」のレポート課題の別解を作成してくる。	・事前にルーブリックを提示し、生徒が評価の観点を意識してレポート課題に取り組めるようにする。
	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>レポート課題 _____年 組 番 氏名</p> <hr/> <p>課題3 会話を参考にしながら、課題1の別解をつくりなさい。          その際、参考にした人物と発言番号を書くこと。 (例) 太郎さん②</p> <p>(別解) 参考にした人物と発言番号・・・ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/></p> </div>

■①別解を作成する際の態度に対するルーブリック  
 (\* 評価方法：数学探究ノート)

- A 今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、自主的に複数の別解をつくることのできた。
- B 今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解をつくることのできた。
- C 今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解を考えようとした。
- D メモ欄を用いて、知識の整理を図ろうとした。

■②別解の数学的な記述に対するルーブリック  
 (\* 評価方法：数学探究ノート)

- A 説明が簡潔で、計算の過程がわかりやすく、図やグラフと、式や言葉を関係付けて表現し、正しく解を求めることができています。
- B 説明において、式や言葉を用いて表現・処理し、正しく解を求めることができています。
- C 説明において、式や言葉を組み合わせて表現・処理している。
- D 説明において、式を用いて表現・処理している。

■は、評価基準を表す。

■は、評価規準を表す。

◎学習のねらい

- ・家庭学習で作成したレポートを生徒同士で相互評価を行い、作成したレポートの問題や解答をよりよいものに修正することで、「数学の事象」を数学化する。

第7時の（単元のまとめのパフォーマンス課題に取り組む）展開例

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項
15分	◇課題に取り組む。  ●問題づくりの際に、工夫や苦労した点について4人グループで話し合う。  ●発表を聞いた3人は、①、②、③のルーブリックを基にした評価を理由とともに発表者に伝えよう。  ●「数学探究ノート」を交換し、評価や質問コメントを記述しよう。	☆恒等式で考えるときにどう表現すればよいか迷った。 ☆解答をどのように書いたらよいのか迷った。  ☆今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、自主的に複数の別解を完成させることができたので①の「別解を作成する際の態度に対する」の評価はAかな。	・プレゼンテーションのため、第6時の4人グループになるよう指示する。  ・発表を聞いた生徒は、理解できなかったところや問題や解答のルーブリックと照らし合わせて改善点などを発表者に伝える。 ・評価の根拠を具体的な理由とともに述べるように指示する。 ・言語活動が停滞しているときは、以下の「言語活動を行う際の着眼点」を確認する。
	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>&lt;課題&gt;レポート課題でつくった別解のプレゼンテーションを行い、得られた意見や評価を基に、別解の修正に生かそう。</p> </div>		
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>①「理由や根拠を質問・説明する」 ②「比較・関連付けて質問・説明する」 ③「新たな視点から捉え直して質問・説明をする」</p> </div>		
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>■③プレゼンテーションにおける態度に対するルーブリック &lt;言語活動&gt; ( * 評価方法：生徒の相互評価)</p> <p>①「理由や根拠を明らかにしながら説明できた」 ②「グループの他の生徒の解答と比較・関連付けて説明できた」 ③「問題を新たな視点から捉え直して説明ができた」 A ①、②、③の観点のうち全てに注意しながら説明ができた。 B ①、②、③の観点のうち二つに注意しながら説明ができた。 C ①、②、③の観点のうち一つに注意しながら説明ができた。 D ①、②、③の、どの観点とも異なる独自の観点で説明できた。</p> </div>		
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>■：態 粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとするとともに、問題解決過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 『学習活動の観察・数学探究ノートの分析』</p> </div>		
10分	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>&lt;課題&gt;同じ方法で別解を作成したもので集まり解答を比較する。</p> </div>		
25分	◇課題2に取り組む。 ●参考にした番号ごとに意見を交流しよう。	☆複素数の相等の条件を忘れていたので、しっかりと記述しよう。 ☆割り算の計算過程の見せ方に工夫がいるな。	・様々な意見に触れ、別解の修正に生かすために、グループ以外で同じ方針の別解の生徒とペアになる。
	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>&lt;課題&gt;得られた意見や評価を基に、自らの別解を修正し、よりよいものに改善しよう。</p> </div>		
	◇振り返りシートに別解の訂正を行う。 ●得られた意見や評価を基に事前に作成した別解を訂正しよう。		・指導者は、提出後の別解を見て再度ルーブリックを基にした評価を行い、最初に作成した別解との改善点を評価する。

準備物・「数学探究ノート」