

令和2年度(2020年度) 数学科教育に関する研究

数学的に考える資質・能力の育成を目指した 高等学校数学科の授業づくり

— 数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れた言語活動を充実させる指導と評価の工夫 —

内容の要約

高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編では、「算数・数学の問題発見・解決の過程」が示され、数学的に考える資質・能力を育成するうえで、数学的活動を通して学習を展開することが一層重視された。

本研究では、教科書の例題を活用して数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れ、生徒の言語活動を充実させる指導と評価の工夫を行う。評価においては「数学探究ノート」を用いて多面的・多角的な評価をし、到達目標としてルーブリックを事前に示すなどの工夫を行った。これらの取組を通して、数学的に考える資質・能力を育成する高等学校数学科の授業づくりができた。

キーワード

算数・数学の問題発見・解決の過程 パフォーマンス課題 言語活動の充実
「数学探究ノート」 多面的・多角的な評価 ルーブリック

目		次	
I	主題設定の理由	(1)	VI 研究の内容とその成果 (6)
II	研究の目標	(1)	1 質問紙調査(第1回)から見た生徒の数学科の学習に関する実態 (6)
III	研究の仮説	(1)	2 数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れた授業づくり (6)
IV	研究についての基本的な考え方	(2)	3 「日常生活や社会の事象」のパフォーマンス課題を用いた実証授業の実際 (7)
1	数学的に考える資質・能力の育成と数学的活動	(2)	4 「数学の事象」のパフォーマンス課題を用いた実証授業の実際 (10)
2	数学的活動におけるパフォーマンス課題	(2)	5 実証授業後の生徒の変容 (13)
3	高等学校数学科における言語活動を充実させる授業づくり	(3)	6 指導者の意識の変容 (13)
4	「数学探究ノート」を活用した多面的・多角的な評価	(4)	VII 研究のまとめと今後の課題 (14)
V	研究の進め方	(5)	1 研究のまとめ (14)
1	研究の方法	(5)	2 今後の課題 (14)
2	研究の経過	(5)	文 献

数学科教育に関する研究

数学的に考える資質・能力の育成を目指した
高等学校数学科の授業づくり

— 数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れた言語活動を充実させる指導と評価の工夫 —

I 主 題 設 定 の 理 由

中央教育審議会(平成28年12月)「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申)」では、高等学校数学科において、「数学の学習に対する意欲が高くないこと」¹⁾や「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明したりすること」¹⁾が課題として指摘された。さらに、これらの課題に適切に対応できるよう改善を図り、数学的に考える資質・能力を育成するために、「『事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程』といった数学的に問題解決する過程が重要である」¹⁾と述べられている。これを受けて、高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編(以下、学習指導要領解説という。)では、指導計画の作成および実際の学習指導に当たって、数学を学習する意義などを実感できるような数学的活動を取り入れたり、問題解決の結果や過程等を説明し伝え合うような機会を設けるなどの言語活動を取り入れたりするといったことに配慮する重要性が示された。

一方、評価については、中央教育審議会(平成31年1月)「児童生徒の学習評価の在り方について(報告)」において、「どのような方針によって評価を行うのかを事前に示し、共有しておくことは、評価の妥当性・信頼性を高めるとともに、児童生徒に各教科等において身に付けるべき資質・能力の具体的なイメージをもたせる観点からも不可欠である」²⁾とされ、評価の方針等を指導者と生徒が共有することの大切さが示された。

そこで、本研究では、生徒が数学を学習する意義などを実感できるような数学的活動を取り入れ、言語活動を充実させる指導と評価の工夫を探る。その際には、評価の方針等を指導者と生徒が共有する工夫としてパフォーマンス課題を取り入れる。パフォーマンス課題に取り組む過程では、到達目標としてルーブリックを事前に示すなどの評価の工夫をする。これらの指導と評価の一体化を図ることで、数学的に考える資質・能力を育成することができるのではないかと考え、本主題を設定した。

II 研 究 の 目 標

数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れ、生徒の言語活動を充実させる指導と、到達目標としてルーブリックを事前に示すなどの評価の工夫を行うことで、数学的に考える資質・能力の育成を目指す。

III 研 究 の 仮 説

高等学校数学科の授業において、数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れ、生徒が数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに、言語活動を充実させる指導を行う。さらに、到達目標としてルーブリックを事前に示すなど、生徒が見通しをもって学習に取り組むことのできる評価の工夫を行えば、数学的に考える資質・能力の育成につながるだろう。

IV 研究についての基本的な考え方

1 数学的に考える資質・能力の育成と数学的活動

学習指導要領解説では、「今回の改訂では、算数科・数学科において育成を目指す資質・能力を、『知識及び技能』、『思考力、判断力、表現力等』、『学びに向かう力、人間性等』の三つの柱に沿って明確化し、各学校段階を通じて、実社会等との関わりを意識した数学的活動の充実等を図っている³⁾と述べられている。また、それらの資質・能力を育成するために、数学的な見方・考え方と数学的活動を相互に関連させることの重要性が示された。

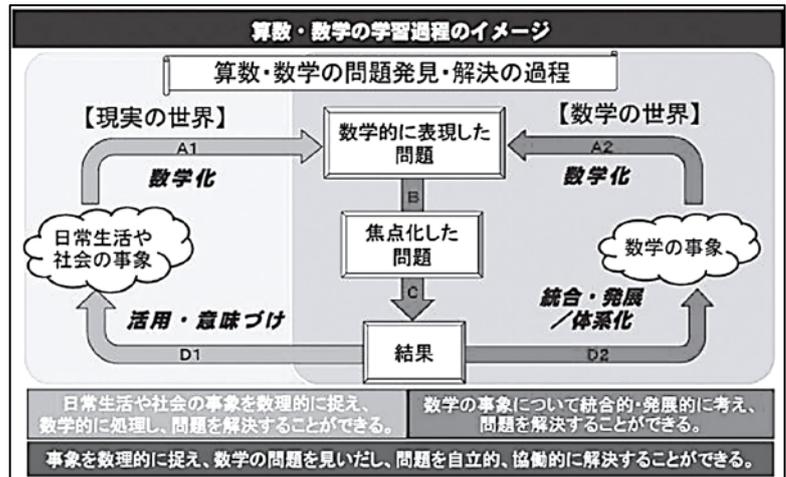


図1 算数・数学の学習過程のイメージにおける「算数・数学の問題発見・解決の過程」

特に、数学的活動を、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」³⁾とし、具体的な学習過程が「算数・数学の問題発見・解決の過程」として図1のように示された。図1の【現実の世界】における「日常生活や社会の事象」では、A1→B→C→D1のサイクルで、【数学の世界】における「数学の事象」では、A2→B→C→D2のサイクルで、「算数・数学の問題発見・解決の過程」を遂行することが求められた。

本研究では、生徒が言語活動を充実させながら、「算数・数学の問題発見・解決の過程」の「日常生活や社会の事象」と「数学の事象」の二つのサイクルを遂行することを数学的活動と捉える。

2 数学的活動におけるパフォーマンス課題

本研究において、パフォーマンス課題とは、これまでに学んだ様々な知識や技能を総合して活用しながら解決していく課題と捉える。パフォーマンス課題を作成する際には、単元または小単元を貫き、何を身に付けるかを明確にした問いである「本質的な問い」を設定する。生徒が、単元または小単元の終末で、学んだ様々な知識や技能を総合してパフォーマンス課題に取り組み、「算数・数学の問題発見・解決の過程」を遂行できるよう数学的活動の充実を図る。

さらに、図1の「算数・数学の問題発見・解決の過程」で示した【現実の世界】と【数学の世界】の二つのサイクルのそれぞれにおいて、教科書の例題を活用したパフォーマンス課題を取り入れる方法を提案する。

(1) 「日常生活や社会の事象」のパフォーマンス課題の作成

図1で示された【現実の世界】において、生徒が「日常生活や社会の事象」を発見し、「数学化」することは、学習内容の抽象度が高まるにつれて難しくなってくる。そこで本研究では、図1で示された「数学的に表現した問題」を活用し、図1のB→C→D1→A1というサイクルに基づいた以下に示す学習活動全体をパフォーマンス課題と捉える。

高等学校数学科の教科書には、単元や小単元の終末に、各単元や小単元で学んだ様々な知識や技能を総合して活用しながら解決していく例題が配置されている(図2)。本研究では、このような例題を図1におけ

$$x, y \text{ が } 4 \text{ つの不等式 } x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12 \text{ を同時に満たすとき、} x + y \text{ の最大値、最小値を求めよ。}$$

図2 数学Ⅱ「軌跡と領域」の「数学的に表現した問題」の例

る「数学的に表現した問題」として捉える。その後の授業で「焦点化した問題」を経て、「結果」までを学習する。ここで、「焦点化した問題」とは、「数学的に表現した問題」を、問題の解決に向けて構想・見通しを立て、分析した後の問題と捉える。

次に、「数学的に表現した問題」に関する「日常生活や社会の事象」の類題および解答例を、生徒に提示する(図3)。生徒は類題および解答例をグループで協働して読み解き、事象の特徴を捉える。その後、先に学習した

「数学的に表現した問題」と類題および解答例の特徴を基に、自分なりに工夫して「日常生活や社会の事象」に関係した問題をつくるというレポート課題に取り組む。

生徒が、問題づくりのレポート課題に取り組むことで、「日常生活や社会の事象」の「活用・意味づけ」を図る。最後に、生徒同士でレポートの相互評価を行い、作成したレポートの問題や解答をよりよいものに修正し、「日常生活や社会の事象」を「数学化」する。そうすることで、2ページの図1で示した【現実の世界】の「算数・数学の問題発見・解決の過程」のサイクルを意識しながら学習に取り組むことができるようにする。

このような一連の流れを「日常生活や社会の事象」のパフォーマンス課題とする。

(2) 「数学の事象」のパフォーマンス課題の作成

「日常生活や社会の事象」のパフォーマンス課題と同様に、「数学的に表現した問題」を活用し、2ページの図1のB→C→D2→A2というサイクルに基づいた以下に示す学習活動全体をパフォーマンス課題と捉える。

各単元や小単元の終末の「数学的に表現した問題」に関して、図4のような条件を変更したり、一般化したりした類題および解答例や、別解を考える会話例などを生徒に提示する。

生徒は類題および解答例等をグループで協働して読み解き、事象の特徴を捉える。その後、先に学習した「数学的に表現した問題」と類題および解答例等の特徴を基に、自分なりに工夫して「数学の事象」に関係した問題や別解をつくるというレポート課題に取り組む。

生徒が、問題や別解をつくるレポート課題に取り組むことで、「数学の事象」の「統合・発展/体系化」を図る。最後に、生徒同士でレポートの相互評価を行い、作成したレポートの問題や解答をよりよいものに修正し、「数学の事象」を「数学化」する。そうすることで、2ページの図1で示した【数学の世界】の「算数・数学の問題発見・解決の過程」のサイクルを意識しながら学習に取り組むことができるようにする。

このような一連の流れを「数学の事象」のパフォーマンス課題とする。

3 高等学校数学科における言語活動を充実させる授業づくり

県教育委員会は「第Ⅱ期 学ぶ力向上滋賀プラン～『読み解く力』の育成を通して～」(平成31年3

(類題①)
部活動でお腹を空かせた高校生が、学校帰りの店で次のような2つの食品を見つけた。お腹が空いているので、お腹いっぱい食べたいが、総食塩量は8g以下、総エネルギーは1200kcal以下にしたい。食べる個数を最大にするには、どちらを何個ずつ食べればよいか考えてみよう。ただし、どちらも1個あたりの重さと値段は同じで、十分なお金を持っているものとする。

	食塩量	エネルギー
パウンドケーキ(1個)	2g	200kcal
カステラ (1個)	1g	300kcal

(解答例) いま、パウンドケーキをx個、カステラをy個買うとすれば、
 $2x + y \leq 8$ ・・・①
 $200x + 300y \leq 1200$
 よって、 $2x + 3y \leq 12$ ・・・②
 $x \geq 0, y \geq 0$ ・・・③ が成り立ち、これら①、②、③の不等式の表す領域は下図の斜線部となる。ただし、境界を含む。

図3 「日常生活や社会の事象」の類題および解答例

(類題②) x, yが自然数で4つの不等式
 $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 7, 2x + 3y \leq 12$
 を同時に満たすとき、x+yの最大値を求めよ。

(変更した点) 不等式の $2x + y \leq 8$ を $x + 2y \leq 7$ に変え、x, yに自然数という条件を付け加えた。

(解答例) 与えられた連立不等式の表す領域をAとする。
 領域Aは4点(0,0), (6,0), (3,2), $(0, \frac{7}{2})$ を頂点とする四角形の周および内部である。

「数学の事象」の類題と解答例を示す。

図4 「数学の事象」の類題および解答例

月)の中で、「必要な情報を確かに取り出す」「情報を比較し、関連付けて整理する」「自分なりに解決し、知識を再構築する」という三つの点を、「読み解く力」を、高め、発揮するプロセスとして挙げている。

当センターの令和元年度の情報教育に関する研究では、先の「読み解く力」の三つのプロセスを基に、「言語活動を行う際の着眼点」を表のように整理した。生徒がこの着眼点を授業で意識して用いることで、高等学校数学科の授業において言語活動を充実させることに一定の成果を上げることができた。一方で、生徒が質問する際には、「言語活動を行う際の着眼点」を意識して用いている姿が少ない様子がうかがえた。

そこで、本研究では、質問する生徒も「言語活動を行う際の着眼点」を意識して用い、生徒同士が言語活動を通して数学的に考える資質・能力を育成することのできる授業づくりに取り組む。

表 「言語活動を行う際の着眼点」

言語活動を行う際の着眼点
①「理由や根拠を質問・説明する」
②「比較・関連付けて質問・説明する」
③「新たな視点から捉え直す質問・説明をする」

4 「数学探究ノート」を活用した多面的・多角的な評価

本研究において、多面的・多角的な評価とは、生徒同士の相互評価、生徒が課題の修正を通して行う自己評価および指導者からのパフォーマンス課題における取組への評価と捉える。

(1) パフォーマンス課題および言語活動に対応したルーブリックの作成と活用

本研究におけるルーブリックとは、成功の度合いを示す数レベル程度の尺度と、それぞれのレベルに対応するパフォーマンスの特徴を示した記述語から成る評価基準表をいう。本研究では、パフォーマンス課題に対応した「作成した問題に対する評価」「別解を作成する際の態度に対する評価」および図5の上部にある「解答例の数学的な記述に対する評価」のルーブリックを作成する。ルーブリックは複数の指導者で作成し、生徒が到達目標として意識しやすくするために、「本質的な問い」から逆算して考え、否定的な表現を用いないこととする。また、生徒がパフォーマンス課題に取り組む前に、到達目標としてルーブリックを示すことで、生徒自身がどのような姿を目指せばよいのかイメージでき、見通しをもって学習できるようにする。さらに、「言語活動を行う際の着眼点」を活用した図5の下部にある「プレゼンテーションにおける態度に対する評価」のルーブリックを示し、生徒同士の相互評価で用い、授業中の言語活動を充実させる。

解答例の数学的な記述に対する評価			
A	B	C	D
説明が簡潔で、計算の過程がわかりやすく、図やグラフと、式や言葉の関係付けて表現し、正しく解を求めることができる。	説明において、式や言葉を用いて表現・処理し、正しく解を求めることができる。	説明において、式や言葉を組み合わせて表現・処理している。	説明において、式を用いて表現・処理している。
プレゼンテーションにおける態度に対する評価			
A	B	C	D
①「理由や根拠を明らかにしながら説明できた」 ②「グループの他の生徒の解答と比較・関連付けて説明できた」 ③「問題を新たな視点から捉え直して説明できた」の全てにあてはまる説明ができた。	①「理由や根拠を明らかにしながら説明できた」 ②「グループの他の生徒の解答と比較・関連付けて説明できた」 ③「問題を新たな視点から捉え直して説明できた」の2つにあてはまる説明ができた。	①「理由や根拠を明らかにしながら説明できた」 ②「グループの他の生徒の解答と比較・関連付けて説明できた」 ③「問題を新たな視点から捉え直して説明できた」のどれか1つにあてはまる説明ができた。	①、②、③の、どの観点とも異なる独自の観点で説明できた。

図5 各課題に共通のルーブリック

(2) 「数学探究ノート」を活用した指導と評価の一体化

「算数・数学の問題発見・解決の過程」を充実させるために、生徒は「数学探究ノート」に学習過程を記録しながらパフォーマンス課題に取り組む。本研究において、「数学探究ノート」とは、「課題の解決に向けた考え方や取組の過程」「ルーブリックを基にした生徒同士の相互評価」「互いに質問し、課題を解決していく言語活動の過程」「『本質的な問い』に対する考え」を記入する欄を設けたノートである。

5ページの図6左側のように、レポート課題として、「課題の解決に向けた考え方や取組の過程」

を記入する。

また、レポートへの相互評価欄には、「ルーブリックを基にした生徒同士の相互評価」を記入し、言語活動を充実させることにつながる工夫をする。

図6右側の振り返りシートには、「互いに質問し、課題

<レポート課題>

課題 「問題および解答例」や教科書で学んだ例題を参考にしながら、日常生活や社会の事象についての文章問題と解答をつくりなさい。

例題 x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

(作成問題) **課題の解決に向けた考え方や取組の過程**

(解答)

工夫した点や問題を作成して気付いたことを書いてください。

●レポートへの相互評価欄

*評価コメントは「①理由や根拠を明らかにする」「②グループの他の生徒の解答と比較・関連付ける」「③問題を新たな視点から捉え直す」の視点に注意して書こう。

評価者	観点①	観点②	観点③	評価コメント

<振り返りシート>

課題 得られた意見や評価を基に、問題および解答を修正し、よりよいものに改善しよう。

(得られた意見) **互いに質問し、課題を解決していく言語活動の過程**

(作成問題) **互いに質問し、課題を解決していく言語活動の過程**

(解答)

日常生活や社会で、領域を用いて問題を解決していくことのよさを書いてください。

↑

「本質的な問い」に対する考え

←

ルーブリックを基にした生徒同士の相互評価

図6 「数学探究ノート」のレポート課題と振り返りシート(一部)

を解決していく言語活動の過程」「『本質的な問い』に対する考え」を記入する欄を設ける。振り返りシートを設けることで、生徒自身が学習過程で得られた内容を振り返りながら、課題の修正を通して自己評価を行えるようにする。

指導者は、「数学探究ノート」の取組の過程や結果を見取り、言語活動に生かす支援を行うことで指導と評価の一体化につなげる。

V 研究の進め方

1 研究の方法

- (1) 数学的に考える資質・能力の育成を目指した授業づくりに向けて、数学的活動に「算数・数学の問題発見・解決の過程」を踏まえたパフォーマンス課題を取り入れた単元と授業を構想する。
- (2) パフォーマンス課題に対応したルーブリックを作成する。
- (3) 数学的活動で言語活動を充実させる指導を行い、「数学探究ノート」における生徒の変容を見取り、多面的・多角的な評価に取り組む。
- (4) 実証授業の事前・事後に、生徒への質問紙調査、指導者への聞き取りおよび「数学探究ノート」の内容の分析を行うことで、授業づくりの成果を検証する。

2 研究の経過

4月	研究構想	9月～11月	研究協力校での実証授業Ⅱ、Ⅲ
5月	研究推進計画の立案		質問紙調査(第2回)
6月	第1回専門・研究委員会 (研究構想、1学期の実証授業の検討)		第3回専門・研究委員会 (研究の成果と課題の分析)
7月	質問紙調査(第1回)	11月～12月	研究論文原稿執筆
8月	研究協力校での実証授業Ⅰ 第2回専門・研究委員会 (2学期の実証授業の検討)	1月	研究発表準備
		2月	研究発表大会
		3月	研究のまとめ

VI 研究の内容とその成果

1 質問紙調査(第1回)から見た生徒の数学科の学習に関する実態

(1) 数学的活動に関する生徒の意識と実態

実証授業前に、研究協力校2校に在学する本研究の対象となる第2学年生徒(119人)に質問紙調査(第1回)を実施し、生徒の意識と実態を把握した。

図7は質問紙調査(第1回)の結果である。質問項目①「自分自身で、条件や設定を変えて数学の問題を解いたことがある」、質問項目②「自分自身で、日常生活や社会の事柄から数学の問題をつくって解いたことがある」という項目で、肯定的な回答をした生徒の割合はそれぞれ18%、11%と低いものであった。このことから、高等学校数学科の授業において、2ページの図1の「算数・数学の問題発見・解決の過程」における「数学化」の充実に向けた取組を行うことは意義があると考えられる。

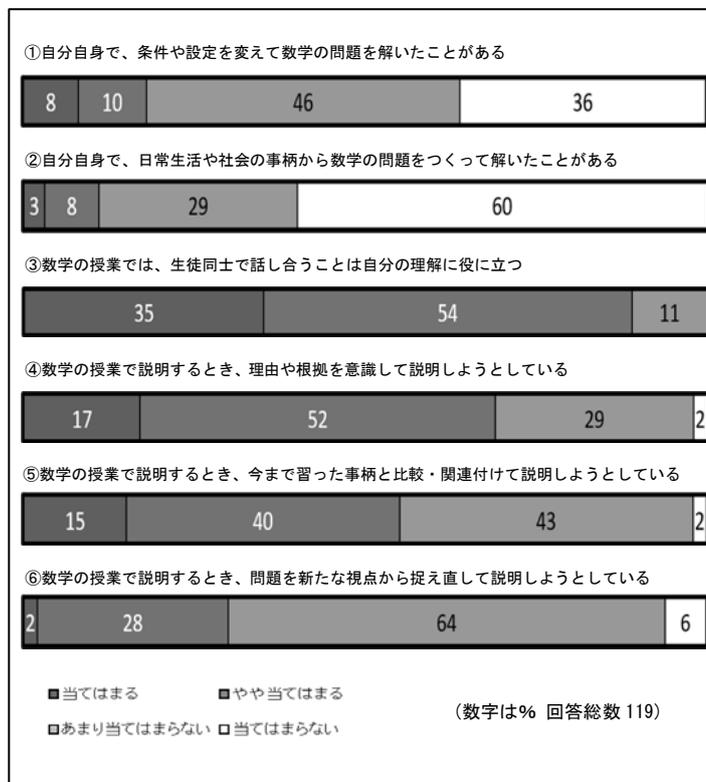


図7 研究協力校における質問紙調査(第1回)の結果

(2) 言語活動に関する生徒の意識と実態

図7の質問項目③では、言語活動の必要性についての生徒の意識を調査した。その結果、「数学の授業では、生徒同士で話し合うことは自分の理解に役に立つ」という項目に肯定的な回答をした生徒は89%となり、生徒が言語活動の大切さを感じていることが分かった。一方で、質問項目④、⑤、⑥の言語活動における意識に関する項目の回答から、生徒が4ページの表の「言語活動を行う際の着眼点」の観点全てを意識できているわけではないことが明らかとなった。

以上の結果を踏まえ、高等学校数学科の授業で意識的に言語活動を取り入れ、得られた結果から新たな疑問や問いを発して対話や議論を進めたり、考えを深めたりできるようにする。

具体的には、パフォーマンス課題の中の、問題づくり等のレポートを生徒同士で相互評価をする場面で、「言語活動を行う際の着眼点」を意識して用いる指導を行い、言語活動を充実させる工夫をした。

2 数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れた授業づくり

数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れるための汎用的な方法を提案するために、以下の流れで授業づくりを進めていくこととした(p.7の図8)。なお、単元や生徒の実態により、2ページの図1の「日常生活や社会の事象」または「数学の事象」のどちらのサイクルでパフォーマンス課題を行うことが適しているかは、指導者が判断することが重要だと考えられる。

パフォーマンス課題を進めるにあたっては、通常2単位時間程度を想定し、第1時の前半で、「数学的に表現した問題」から「焦点化した問題」を経て「結果」までを得る。後半でパフォーマンス課題の「数学的に表現した問題」の類題および解答例等をグループで協働して読み解く。その後の家庭

学習で問題づくりや別解づくりのレポート課題に取り組み、第2時で自らのレポートのプレゼンテーション、生徒同士の相互評価およびレポートの修正を行う。指導者は、生徒の「数学探究ノート」の記述からパフォーマンス課題の取組の評価を行い、今後の単元や小単元のパフォーマンス課題の指導につなげる。

授業計画	○生徒の活動 ◇指導者の準備・働きかけ	算数・数学の問題発見・解決の過程
「本質的な問い」を設定する。	◇単元または小単元を貫き、何を身に付けるかを明確にした問いであることに留意する。	*下のA、B、C、Dは2ページの図1に対応している。
単元または小単元の「数学的に表現した問題」を選定する。	◇単元または小単元の例題や、章末問題の中から、学んだ様々な知識や技能を総合して解く必要のある「数学的に表現した問題」を選定する。	「数学的に表現した問題」
適切なパフォーマンス課題とルーブリックを作成する。	◇「数学的に表現した問題」が「日常生活や社会の事象」か「数学の事象」のどちらのパフォーマンス課題に適しているのか判断し、ルーブリックを作成する。	B ↓ 「焦点化した問題」 ↓ C ↓ 「結果」
生徒にルーブリックを説明し、評価基準を基に見通しをもって家庭学習に取り組むことができるようにする。	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">パフォーマンス課題</div> 「日常生活や社会の事象」が適している場合 ◇日常生活や社会での事象に関する類題と解答例を提示する。 「数学の事象」が適している場合 ◇別解を考える会話例を提示する。 ◇条件を変更したり、一般化したりした類題と解答例を提示する。	「活用・意味づけ」 D1
授業でプレゼンテーションを実施し、「言語活動を行う際の着眼点」を基に、生徒同士の相互評価を促す。	○グループごとに問題例と解答を読み解いたり、会話例から別解につながる箇所を特定したりする。	「統合・発展／体系化」 D2
「数学探究ノート」によりパフォーマンス課題の取組を評価する。	○家庭学習でルーブリックを基に、見通しをもちながら「数学探究ノート」の問題づくりや別解づくりのレポート課題に取り組む。	「数学化」 A1 A2
今後の指導につなげる。	○家庭学習で取り組んだ、自らのレポートのプレゼンテーションを行い、生徒同士の相互評価を行う。 ○生徒同士の相互評価で出た意見を基に、「数学探究ノート」の振り返りシートの欄にレポートの修正を行う。	「数学的に表現した問題」

図8 パフォーマンス課題を取り入れた授業計画

3 「日常生活や社会の事象」のパフォーマンス課題を用いた実証授業の実際

(1) 「日常生活や社会の事象」を生徒に提示する授業の実践①

本実践での、「本質的な問い」と「数学的に表現した問題」は8ページの図9のとおりとした。第1時では、「数学Ⅱ」における小単元「軌跡と領域」にある線形計画法の例題を学んだ。その後、日常生活や社会の事象に関する問題として、教科書の数値をそのまま用いたエネルギーと食塩量に関する問題と、工場での製品の生産を題材とした類題を解答例とともに提示し、生徒が協働して読み解くことで動機付けを行った。教科書の例題を学習後に、線形計画法が日常生活や社会の事象の解決に有効であることを実感することで、「算数・数学の問題発見・解決の過程」の「活用・意味づけ」を図った。生徒は4人グループになり、線形計画法の構造の特徴を読み解き、問題づくりにつながる考え方をグループで検討した。その後、家庭学習で問題づくりに取り組んだ後、第2時で自らが作成した問題のプレゼンテーションに取り組み、生徒同士の相互評価を通して、「数学化」

を図った。いずれの過程においても、自分の考えをしっかりと練ること、およびグループでの活動の際には「言語活動を行う際の着眼点」を確認し、言語活動の充実を図ることを重視した。

本質的な問い	日常生活や社会で、線形計画法をどのように用いることができるのか。												
数学的に表現した問題	x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。												
パフォーマンス課題	問題例および「数学的に表現した問題」を参考にしながら、日常生活や社会の事象についての文章問題と解答をつくりなさい。また、その後の相互評価を経て、問題と解答を修正しなさい。												
数学的に表現した問題と同じ数式になる「日常生活や社会の事象」の例 生徒に提示した日常生活や社会の事象に関する問題	(問題例①) →部活動でお腹を空かせた高校生が、学校帰りの店で次のような2つの食品を見つけた。お腹が空いているので、お腹いっぱい食べたいが、総食塩量は8g以下、総エネルギーは1200kcal以下にしたい。食べる個数を最大にするには、どちらを何個ずつ食べればよいか考えてみよう。 ただし、どちらも1個あたりの重さと値段は同じで、十分なお金を持っているものとする。 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>食塩量</th> <th>エネルギー</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>パウンドケーキ(1個)</td> <td>2g</td> <td>200kcal</td> </tr> <tr> <td>カステラ (1個)</td> <td>1g</td> <td>300kcal</td> </tr> </tbody> </table>		食塩量	エネルギー	パウンドケーキ(1個)	2g	200kcal	カステラ (1個)	1g	300kcal			
		食塩量	エネルギー										
パウンドケーキ(1個)	2g	200kcal											
カステラ (1個)	1g	300kcal											
	(問題例②) ある工場の製品A、Bを1トン生産するのに必要な原料P、Qの量と製品A、Bの価格は、それぞれ下の表のとおりとする。この工場へ1日に供給できる原料Pが最大8トン、原料Qが最大12トンであるとき、工場で1日に生産される製品A、Bの総価格を最大にするには、A、Bをそれぞれ、1日に何トンずつ生産すればよいか。 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>原料P</th> <th>原料Q</th> <th>価格</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>2トン</td> <td>2トン</td> <td>1万円</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>1トン</td> <td>3トン</td> <td>2万円</td> </tr> </tbody> </table>		原料P	原料Q	価格	A	2トン	2トン	1万円	B	1トン	3トン	2万円
	原料P	原料Q	価格										
A	2トン	2トン	1万円										
B	1トン	3トン	2万円										
生徒に事前に提示したルーブリック	●作成した問題に対する評価 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定しており、数式を増やす工夫がみられる。</td> <td>日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定をしている。</td> <td>元の問題と異なる数式を用いようとしている。</td> <td>問題例と同じ数式を用いている。</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定しており、数式を増やす工夫がみられる。	日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定をしている。	元の問題と異なる数式を用いようとしている。	問題例と同じ数式を用いている。				
A	B	C	D										
日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定しており、数式を増やす工夫がみられる。	日常生活や社会で起こることがらを自ら発見して問題の設定をしている。	元の問題と異なる数式を用いようとしている。	問題例と同じ数式を用いている。										

図9 「日常生活や社会の事象」を用いたパフォーマンス課題①

図10は生徒が作成した問題である。本生徒は、当初領域のグラフをかき、頂点のみに着目し、「家具Bのみを2個作れば条件を満たしながら総価格が最大6万円となる」としていた。

しかし、言語活動を行う中で、グループの他の生徒から、「領域内の頂点ではない点(3, 0)は条件を満たすが、なぜ解にならないのか」という理由を問う質問がなされた。この質問から、領域内の格子点に着目し、「家具Aのみを3個作れば条件を満たしながら総価格が最大6万円となる」という解も得ることができた。

図11のように、「数学探究ノート」の評価コメント欄に

(作成問題)
ある家具A、Bを1つ作るのに必要な木材と石材の量と、家具A×Bの価格は、それぞれ下の表の通りである。1日に使える木材が20個、石材が10個であるとき、1日に作ることができる家具A、Bの総価格を最大にするには、A、Bをそれぞれ1日に何個ずつ作ればよいか。

	木材	石材	価格
家具A	6	2	2万円
家具B	10	5	3万円

(解答例)
家具Aをx個、家具Bをy個作るとすると、
 $6x + 10y \leq 20 \dots ①$
 $2x + 5y \leq 10 \dots ②$
 $x \geq 0, y \geq 0 \dots ③$ が成り立ち、これらの不等式の表す領域は図の斜線部分となる。
 ここで $2x + 3y = k$ とおくと
 $3y = -2x + k \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{k}{3} \dots ④$
 これは傾斜 $-\frac{2}{3}$ 、y切片が $\frac{k}{3}$ の直線を表す。
 直線④が斜線部を通りy切片が最大となるのは、この直線が点(0, 2)を通るときである。
 したがって $x=0, y=2$ のとき、
 おなわち、家具Bのみを2個つくれば、総価格が最大6万円になる。

図10 「数学探究ノート」に生徒が作成した問題(下線は筆者)

評価者	観点①	観点②	観点③	評価コメント
	B	B	B	解が2通りになって興味深かった。
	B	B	A	アレバンテーションでみんなと一緒に考えていると新たな発見もあり面白かった。
	B	A	B	解が2通りになる問題を作っていて面白かった。図を改めて見ると様々な気づきがあって良いということがよくわかりました。

図11 「数学探究ノート」における生徒同士の相互評価

は、「プレゼンテーションを行い、みんなと一緒に考えてみると新たな発見があり、面白かった」といった記述が見られ、生徒が言語活動の効果を実感している様子が見えがえた。

また、図12のように「数学探究ノート」の振り返りシートでは、個数が整数であることを記述し、理由や根拠を明確にした解答に改善されている。さらに、図13は、本実践での「本質的な問い」に対する授業後の生徒の記述である。下線部の記述から、生徒が日常で数学を用いることよさを実感していることが分かる。

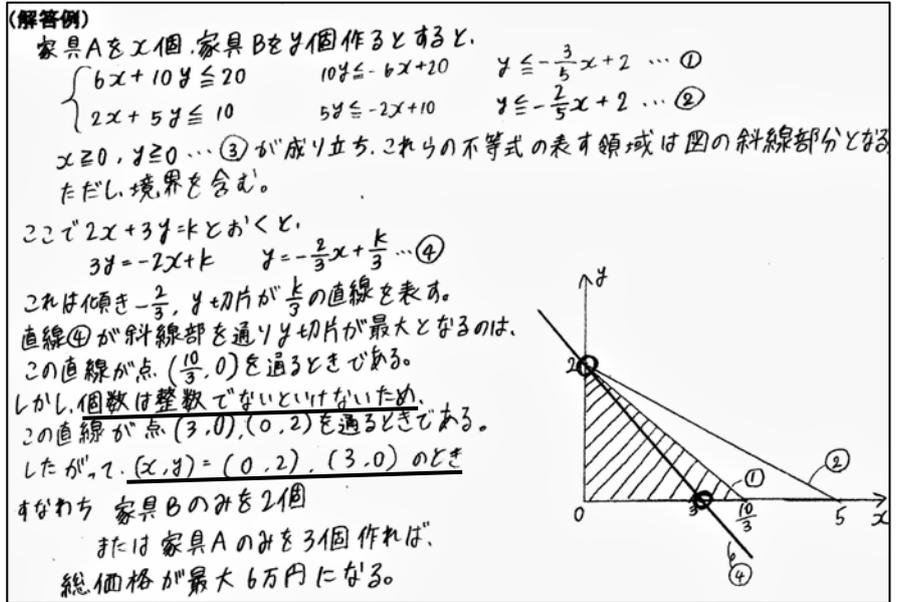


図12 生徒同士の相互評価を経て修正された「数学探究ノート」のレポート(下線は筆者)

日常生活や社会で、領域を用いて問題を解決していくことよさを書いてください。
簡単に最大量を求めることができるので、とても良いと思います。
日常生活で数学を使う場面は少ないと思いますが、このように
求めやすいのなら使いたいと思います。

図13 「数学探究ノート」の「本質的な問い」に対する生徒の記述(下線は筆者)

(2) 「日常生活や社会の事象」を生徒に提示する授業の実践②

本実践での「本質的な問い」と「数学的に表現した問題」は、図14のとおりとした。

本質的な問い	日常生活や社会での、指数や対数の有用性とは何だろうか。		
数学的に表現した問題	2^n が10桁の数となるような自然数nをすべて求めよ。ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。		
パフォーマンス課題	問題例および「数学的に表現した問題」を参考にしながら、日常生活や社会の事象についての文章問題と解答をつくりなさい。また、その後の相互評価を経て、問題と解答を修正しなさい。		
生徒に提示した日常生活や社会の事象に関する問題	(問題例①) ある空想漫画にでてくる道具の中に、次のような薬品がある。その薬品は液体で、1滴振りかけると5分ごとにそのものの個数が2倍になる。いま1個のまんじゅうにその薬品をかける。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$ 、 $\log_{10}3 = 0.4771$ とし、答えは整数で求めよ。 (1) クラス30人が1人1個以上まんじゅうをもらえるのは何分後か。 (2) 滋賀県の人口を約150万人としたとき、全員が1人1個以上まんじゅうをもらえるのは何分後か。		
	(問題例②) 放射性元素などで、「半減期」という言葉を聞くことがある。半減期とは、放射性元素が自然崩壊によって、その個数が1/2になるまでの時間をさす。 時刻tで崩壊せずに残っている原子の個数は、 $X(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}$ で表される。ただし、Mははじめの量、 t_0 は半減期とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。 (1) 半減期2年のある物質が1024gであるとき、16年経過すると何gになるか。 (2) 放射性元素の数が、5年で $\frac{1}{100}$ になったとき、この放射性元素の半減期を求めよ。		
生徒に事前に提示したルーブリック	●作成した問題に対する評価		
	A 問題例に工夫を加えた設定に変えたり、実際の放射性元素を調べたりして問題を作成したうえで、オリジナルな設問を付けて加えている。	B 問題例に工夫を加えた設定に変えたり、実際の放射性元素を調べたりして問題を作成している。	C 問題例の数値を変換した問題の設定となっている。

図14 「日常生活や社会の事象」を用いたパフォーマンス課題②

第1時では、「数学Ⅱ」における小単元「対数関数」にある常用対数を用いる例題を学んだ。日常生活や社会の事象に関する問題として、生徒が親しみをもちやすい空想漫画や放射性元素の半減期を題材にした類題を解答例とともに提示し、生徒が協働して読み解くことで動機付けを行った。生徒は、その後、家庭学習で問題づくりに取り組んだ。



図15 大型提示装置を用いて活発に言語活動を行う様子

第2時では、4人グループになり、生徒同士の相互評価を行った後、グループ内でルーブリックによる評価の高かった問題を選び、大型提示装置を用いて説明し、質問を受ける場を設定した(図15)。ここでも、指導者は、説明や質問の際には、「言語活動を行う際の着眼点」を用いることを確認した。問題例①を基に問題づくりをし、発表した生徒からは、問題文に菓子の体積の情報を付け足し、日本の領空までを考慮した容積を埋

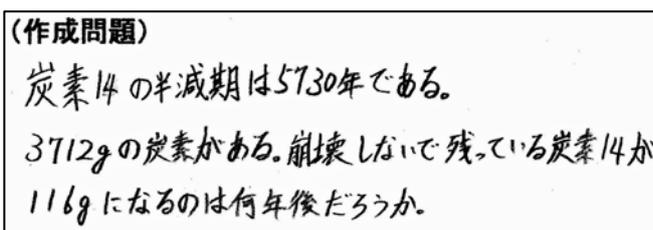


図16 問題例②を基に生徒が作成した問題

め尽くすまでの時間を調べたり、底を5に変えて桁数の問題と融合させたりした問題などが発表された。ここでは、グループによる生徒同士の相互評価の様子を机間指導で評価していた指導者から、「なぜ、底を5にしたのか」という理由・根拠を問う発問がなされた。問題を作成した生徒からは、「5を、10割る2とみると、常用対数表を使わずに与えられた条件だけで問題をつくることができた」といった、新たな視点から捉え直して説明をする姿が見られた。

図16は、問題例②を基にした生徒の作成問題である。この生徒は、実際の放射性元素について調べ、9ページの図14にある問題例②の(1)、(2)とは異なる視点から問題づくりを行うとともに、設定した数値を工夫することで、常用対数表を用いなくても計算できるような問題づくりを行っていた。このことから、生徒が9ページの図14にある、「作成した問題に対する評価」に関するルーブリックをしっかりと意識して取り組んでいたことが分かる。

このように、パフォーマンス課題による取組に、ルーブリックを評価基準として事前に示し問題づくりを取り入れた活動は、「言語活動を行う際の着眼点」の「新たな視点から捉え直す質問・説明をする」活動に結び付きやすいと考えられる。また、他の生徒からは問題づくりの根拠を問う質問もあり、活発な言語活動が見られた。

4 「数学の事象」のパフォーマンス課題を用いた実証授業の実際

(1) 「条件を変更したり、一般化したりした類題および解答例」を生徒に提示する授業実践

本実践は8ページの図9の実践と「数学的に表現した問題」は同じであるが、「数学の事象」からパフォーマンス課題を作成したために、「本質的な問い」やルーブリックは異なる(p. 11の図17)。この課題では、生徒自身が教科書の例題を基に条件を変化させ、実際に計算することで、線形計画法の様々な様相を経験し、「算数・数学の問題発見・解決の過程」の「統合・発展/体系化」を図った。生徒は課題に取り組む際に、個人で思考した後、4人グループになり、線形計画法の構造の特徴を読み解き、問題づくりにつながる考え方をグループで検討した。

話合いの中で、生徒らから、11ページの図17の問題例②では、複数の格子点が最大値を与えるこ

とに気付き、必ずしも領域の頂点で最大値や最小値をとるわけではないといった気付きも出た。

本質的な問い	領域や目的関数を変更したとき、線形計画法がどのように一般化されていくのだろうか。										
数学的に表現した問題	x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。										
パフォーマンス課題	問題例を参考にしながら、「数学的に表現された問題」の不等式の不等号の向きを変えたり、条件を変えたりして、最大値が5になるような問題と解答例をつくりなさい。また、その後の相互評価を経て、解答を修正しなさい。										
生徒に提示した数学の事象に関する問題	(問題例①) x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 7, 2x - y \leq 4$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値を求めよ。 (問題例②) x, y が自然数で4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 7, 2x + 3y \leq 12$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値を求めよ。										
条件を変更したり、一般化したりした類題および解答例 生徒に事前に提示したルーブリック	●作成した問題に対する評価										
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>不等式や条件を変更することで領域の図形を変え、かつ最大値・最小値を求める関数に変更された問題となっており、最大値を5に設定できている。</td> <td>最大値・最小値を求める関数はそのままであるが、不等式や条件を変更することで領域の図形を変えており、最大値を5に設定できている。</td> <td>領域の図形はそのままであるが、最大値・最小値を求める関数に変更され、最大値を5に設定できている。</td> <td>領域や最大値・最小値を求める関数を変化させている。</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	不等式や条件を変更することで領域の図形を変え、かつ最大値・最小値を求める関数に変更された問題となっており、最大値を5に設定できている。	最大値・最小値を求める関数はそのままであるが、不等式や条件を変更することで領域の図形を変えており、最大値を5に設定できている。	領域の図形はそのままであるが、最大値・最小値を求める関数に変更され、最大値を5に設定できている。	領域や最大値・最小値を求める関数を変化させている。		
A	B	C	D								
不等式や条件を変更することで領域の図形を変え、かつ最大値・最小値を求める関数に変更された問題となっており、最大値を5に設定できている。	最大値・最小値を求める関数はそのままであるが、不等式や条件を変更することで領域の図形を変えており、最大値を5に設定できている。	領域の図形はそのままであるが、最大値・最小値を求める関数に変更され、最大値を5に設定できている。	領域や最大値・最小値を求める関数を変化させている。								

図17 「条件を変更したり、一般化したりした類題および解答例」を用いたパフォーマンス課題

本実践では、自由に問題づくりをするのではなく、パフォーマンス課題の中で、「最大値が5になるような問題と解答例をつくりなさい」と解に制限をつけることによって、生徒が問題づくりの際に思考を深められるように工夫をした。

図18に示す生徒は、作成問題で領域を表す不等式を「 $2x + 2y \leq 10$ 」としたため、領域の境界が、最大値および最小値を求めるために立式した「 $x + y = k$ 」と重なる現象が起きた。

本生徒は、生徒同士の相互評価前には、領域の頂点の(3, 2)のみで最大値をとっていたが、生徒同士の話し合いによって、正しく最大値を与える線分を導き出した。

実際に問題作成後の生徒の振り返りには、「決められた条件に沿って、自ら問題を作成することによって、より問題の構成が理解しやすくなり、同じような問題を解きやすくなった」という意見があり、解に制限をつけた問題づくりは、パフォーマンス課題をつくる際の汎用的な方法の一つだと考えられる。

また、「本質的な問い」に対する記述には、「領域の頂点は、あくまで最大値や最小値を与える候補である」といったものも多く見られ、線形計画法の理解が深まったことがうかがえる。

(得られた意見)
最大値をとる点が1つだけじゃない

(作成問題)
 x, y が4つの不等式, $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 2y \leq 10, 3x + 2y \leq 11$ と同時に満たすとき $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ。

(解答)
与えられた連立不等式の表す領域をAとする。
領域Aは4点(0,0)(0.5,0)(3,2)(3,0)と頂点とする。四角形の内部および周である。
 $x + y = k$ とおくと
 $y = -x + k$ より、これは傾きが-1の切片がkである直線と表す。
この直線の領域Aと共有点を持つときのkの値の最大値, 最小値を求めよ。
領域Aに接する直線の切片は
線分 $y = -x + 5 (0 \leq x \leq 3)$
kは最大で、このとき $k = 5$ 。
点(0,0)を通るときkは最小で、このとき $k = 0$ 。したがって、
 $x + y = y = -x + 5 (0 \leq x \leq 3)$ の最大値5と、
 $x = 0, y = 0$ のとき最小値0ととる。

図18 「数学探究ノート」の振り返りシートの生徒の記述 (下線は筆者)

(2) 「別解を考える会話例」を生徒に提示する授業実践

本実践では、別解を考える生徒と指導者の会話を基に、パフォーマンス課題に取り組んだ。本授業での「本質的な問い」と「数学的に表現した問題」は、12ページの図19のとおりとした。

第1時は、パフォーマンス課題の導入として位置付け、生徒と指導者の会話文を手がかりに、既

習の例題に対して様々な解法を考える動機付けを行った。これは、大学入学共通テスト試行調査を参考にした形式である。個人で思考した後、生徒は4人グループになり、別解につながると考えられる会話文の箇所を特定し、解答につながる考え方を検討した。

本質的な問い	高次方程式を解くときには、どのような方法が考えられるのだろうか										
数学的に表現した問題	課題1 a, b は実数とする。3次方程式 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ の1つの解が $1 + 2i$ であるとき、実数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。										
パフォーマンス課題	会話を参考にしながら、課題1の別解をつくりなさい。その際、参考にした人物と発言番号を書くこと。また、その後の相互評価を経て、解答を修正しなさい。										
別解を考える会話例	<p>先生と太郎さんと花子さんは、課題1について話している。3人の会話を読んで、下の問いに答えよ。</p> <p>太郎さん①：「なんだか代入して計算するのは、展開するとき計算ミスをして間違ふ可能性も高いし面倒くさいから嫌だな」</p> <p>花子さん①：「教科書に実数係数の n 次方程式で $1 + 2i$ が解ならその共役な複素数 $1 - 2i$ も解になると書いてあったよ」</p> <p>太郎さん②：「共役な複素数 $1 - 2i$ を代入しても同じ答えが出るはずだね。でも、せつかく解が2数も分かっているのだから、何か他の解き方もあるのではないかな？」</p> <p>花子さん②：「2数の解が分かっているのであれば、2次方程式がつかれるね？」</p> <p>花子さん③：「この2次方程式と問題文の3次方程式はどんな関係にあるのだろうか」</p> <p>太郎さん③：「それなら、いろいろと方法が考えられるね」</p> <p>花子さん④：「課題1の解答例と比べてみると、実際に割り算をしてみてもいいね」</p> <p>太郎さん④：「もう一つの解を p と置いて、係数を比較するとか」</p> <p>花子さん⑤：「それぞれの方法を試してみよう」</p> <p>先生①：「2人ともよい点に気付いたね。他にも3次方程式の解と係数の関係を用いても解くことができるよ。興味のある人はやってみよう」</p>										
生徒と指導者の会話											
生徒に事前に提示したルーブリック	<p>●別解を作成する際の態度に対する評価</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、自主的に複数の別解をつくることのできた。</td> <td>今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解をつくることのできた。</td> <td>今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解を考えようとした。</td> <td>メモ欄を用いて、知識の整理を図ろうとした。</td> </tr> </tbody> </table>			A	B	C	D	今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、自主的に複数の別解をつくることのできた。	今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解をつくることのできた。	今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解を考えようとした。	メモ欄を用いて、知識の整理を図ろうとした。
A	B	C	D								
今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、自主的に複数の別解をつくることのできた。	今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解をつくることのできた。	今までに学んだ様々な事柄を積極的に活用し、別解を考えようとした。	メモ欄を用いて、知識の整理を図ろうとした。								

図19 「別解を考える会話例」を用いたパフォーマンス課題

家庭学習で作成した解答では、図20のように式の羅列で解答を記述していた生徒が、生徒同士の相互評価によって、式と式の間に適切な言葉を追記したり、根拠となる計算式を加えたりして、「解答例の数学的な記述に対する評価」を改善している例が多く見られた(図21)。

生徒の振り返りには、「解答を作成するときに省いた言葉を、ルーブリックを意識して、プレゼンテーションの際に付け加えることで、よりわかりやすくなったと評価されたので(解答に)付け足した」「アドバイスを基に、中括弧の使い方を変えた」といった記述が見られ、授業中の生徒同士の相互評価の効果を生徒自身が実感している様子うかがえた。

(別解) 参考にした人物と発言番号・・・ 太郎さん②

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$$

$$(1 - 2i)^3 - 3(1 - 2i)^2 + a(1 - 2i) + b = 0$$

$$-11 + 2i + 9 + 12i + a - 2a + b = 0$$

$$(-2 + a + b) + i(14 - 2a) = 0$$

$$a + b - 2 = 0, -2a + 14 = 0$$

$$a = 7, b = -5$$

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$x = 1, 1 \pm 2i$$

図20 「数学探究ノート」における相互評価前の生徒の解答

(解答)

課題1の他の解より、 $1 - 2i$ という解が得られているので

$x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ の式に x の部分を代入する。

$$(1 - 2i)^3 - 3(1 - 2i)^2 + a(1 - 2i) + b = 0$$

整理すると、

$$(a + b - 2) + i(-2a + 14) = 0$$

$$\begin{cases} a + b - 2 = 0 \dots \textcircled{1} \\ -2a + 14 = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

よって $a = 7, b = -5$ 。つまり元の式は $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$$

よって $x - 1$ を因数にもつ

$$(x - 1)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$x = 1, x = 1 \pm 2i$$

よって他の解は $1, 1 - 2i$

解答の根拠となる言葉や計算式が追記されている

図21 「数学探究ノート」における相互評価後の生徒の解答(下線は筆者)

これらのことから、ルーブリックを活用することは、見通しをもって学習に取り組むことだけでなく、言語活動を充実させることにも意義があると考えられる。

5 実証授業後の生徒の変容

図22に示す、「自分自身で、条件や設定を変えて数学の問題を解いたり、日常生活や社会の事柄から数学の問題をつくらせて解いたりした活動について、あなたの意見を自由に書いてください」の自由記述からは、生徒が数学を学習することのよさを実感する記述が見られ、本研究における取組が効果的であったと考える。

- ・ 日常生活で起きていることも、数学を使って解決することができると実感した。
- ・ 普段あまり日常生活を意識して数学の問題を考えることがなかったが、問題をつくる活動を通して数学の知識がより深まった。
- ・ 他人の解き方や、その過程を知ることによって、自分の解き方と比較でき、自分でもやってみようと考えられるのでよい。
- ・ 自分で問題をつくるためには、しっかりと理解できていないとつくりにくいので、自分がどれだけ理解できているかを知るためにも問題づくりの活動はよかった。
- ・ 問題の本質や条件の意味がよく分かり、理解が深まった。

図22 実証授業後の生徒の自由記述

また、各実証授業における生徒の振り返りシートを評価した結果を指導者がまとめた。分析はルーブリックを基に行った。図23は「解答例の数学的な記述に対する評価」の生徒同士の相互評価の前後の結果を示している。4ページの図5 上部の項目A「説明が簡潔で、計算の過程がわかりやすく、図やグラフと、式や言葉を関係付けて表現し、正しく解を求めることができている」の割合が特に大きく上がっているのが分かる。このことから、ルーブリックを事前に示し、生徒同士の相互評価を行うなどの工夫をすることは、数学的に考える資質・能力の育成につながると考える。

しかしながら、図24に示すように、「作成した問題に対する評価」はあまり変化が見られなかった。このことは、問題づくりに関しては、生徒同士の相互評価を経て、生徒が家庭学習でより主体的に修正に取り組むことができなかったことを表す。今後、よりよい課題の提示の仕方や、生徒同士の相互評価の方法を工夫し、生徒がより主体的に問題づくりに取り組むための研究が必要であると考えられる。

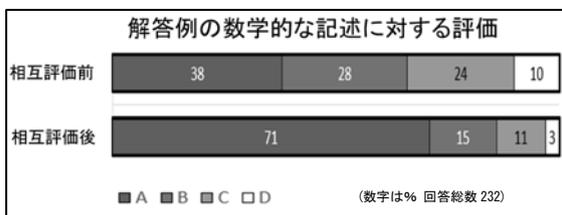


図23 解答の数学的な記述に対する相互評価前後での評価の変化

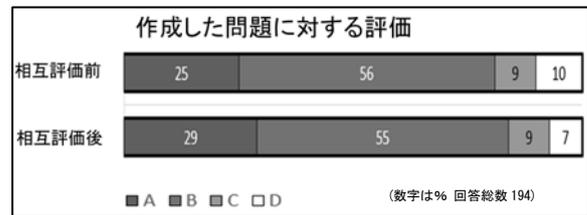


図24 作成した問題に対する相互評価前後での評価の変化

6 指導者の意識の変容

実証授業後、数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れ、言語活動を充実させる取組について、指導者と意見交流した内容を図25にまとめた。指導者は、「ルーブリックを事前に生徒に提示したことで、生徒自身もどのような姿を目指せばよいかイメージしながら、主体的に授業に取り組むことができた」

- ・ 到達目標としてルーブリックを事前に示すことで、生徒が見通しをもって学習に取り組む姿を見ることができた。また、指導者自身もルーブリックを基に、生徒が身に付けてほしい数学的に考える資質・能力を意識しながら授業に臨むことができた。
- ・ 「数学探究ノート」に自ら問題を作成し、解答をつくることにより、生徒自身が問題についてより深く理解できている様子を感じた。また、言語活動を通して、自分自身の間違いに気付き、新たな発見をすることができていた。本研究でのパフォーマンス課題の有効性を感じた。

図25 実証授業後の指導者の意識の変容

「取組を通して、生徒が予想以上に意見を交流する姿が見られた」と述べた。

また、数学的に考える資質・能力を育成するうえで、生徒と評価基準を共有することの有効性に気付き、本研究で示した、「言語活動を行う際の着眼点」のような枠組みが、言語活動を充実させるために高校生に対しても有効であることを再認識した様子であった。

さらに、「数学探究ノート」への記述を基に、個人の考えをまとめ、意見を交流したり、説明し合ったりする場面を繰り返し設定することで、数学的な表現力の向上につながっていくと感じている様子であった。

VII 研究のまとめと今後の課題

1 研究のまとめ

- (1) 単元や小単元の終末にある、「数学的に表現した問題」を基にして数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れ、言語活動を充実させる指導を行うことにより、生徒が数学を学習するよさを実感することができた。
- (2) 到達目標としてルーブリックを事前に示し、「数学探究ノート」を用いて多面的・多角的な評価を行うことにより、数学的に考える資質・能力の育成を目指した高等学校数学科の授業づくりにつながった。

2 今後の課題

- (1) 本研究では、「日常生活や社会での事象に関する類題と解答例を提示する」「別解を考える会話例を提示する」および「条件を変更したり、一般化したりした類題および解答例を提示する」ことで、数学的活動にパフォーマンス課題を取り入れたが、他の有効な方法等についても検討する必要がある。
- (2) 本研究において、生徒同士の相互評価における前後で、「作成した問題に対する評価」があまり変化しなかった。生徒がより主体的に問題づくりに取り組むための方法を研究する必要がある。

文 献

- 1) 文部科学省中央教育審議会「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申)」、平成28年(2016年)
 - 2) 文部科学省中央教育審議会「児童生徒の学習評価の在り方について(報告)」、平成31年(2019年)
 - 3) 文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」、平成30年(2018年)
- 滋賀県教育委員会「第Ⅱ期 学ぶ力向上滋賀プラン～『読み解く力』の育成を通して～」、平成31年(2019年)
- 滋賀県総合教育センター「学ぶ力の向上につながる高等学校数学科の主体的・協働的に学ぶ学習を取り入れた授業づくり」、平成28年(2016年)
- 滋賀県総合教育センター「タブレット端末を活用することによる家庭学習と授業を連携し言語活動を充実させる高等学校数学科の授業づくり」、令和2年(2020年)

トータルアドバイザー

専門委員	国立大学法人滋賀大学教育学部准教授	渡邊 慶子
研究委員	滋賀県立東大津高等学校教頭	嶋原 良裕
	滋賀県教育委員会事務局高校教育課指導主事	比良 正仁
研究協力校	滋賀県立草津東高等学校教諭	上原 仁
	滋賀県立甲西高等学校教諭	菊井 梨加
	滋賀県立草津東高等学校	
	滋賀県立甲西高等学校	