# 令和６年度数学科教育に関する研究における実証授業の指導計画とその授業の実際

研究テーマ　数学的に考える資質・能力の育成に向けた、「問題発見・解決の過程」を遂行する高等学校数学科の授業改善
―数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を充実させる指導の工夫を通して―

既習の学習内容である学習課題を基にA「問題を見いだす」数学的活動

| 学習内容 | 目標 | ページ |
|---|---|---|
| 数学Ⅰ<br>「連立不等式」 | 共通部分の多様さを把握したり、連立不等式が表す解の意味について考察したりすることができる | p.2～11 |
| 数学Ⅰ<br>「二次関数の決定」 | 二次関数を決定する条件を自身で見いだすことができる | p.12～21 |
| 数学Ⅱ<br>「対数を含む方程式・不等式」 | 真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる | p.22～29 |
| 数学Ⅲ<br>「逆関数・合成関数」 | 種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる | p.30～44 |

未習の学習内容である学習課題に対してB「見通しを立てる」数学的活動

| 学習内容 | 目標 | ページ |
|---|---|---|
| 数学Ⅰ<br>「二次関数の最大値・最小値」 | 二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる | p.45～52 |
| 数学Ⅱ<br>「三次関数の最大値・最小値」 | 微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる | p.53～65 |
| 数学Ⅲ<br>「無限等比級数」 | 収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる | p.66～74 |

この資料は「問題発見・解決の過程」を生徒一人ひとりが自立的、協働的に遂行する指導計画を１、２単位時間で実施できるように作成したものです。これが生徒が主体的に取り組んだり、生徒が自身で数学における新たな概念、原理や法則を見いだしたりする授業づくりのヒントになればと思っています。是非御活用ください。

【資料について】
・この資料の構成としては、「１はじめに」「２指導の計画と方法(指導上の工夫)」「３授業の実際」「４まとめ」となっています。
・「２指導の計画と方法(指導上の工夫)」における「(４)学習の展開例」については、実証授業後の研究協議等で授業を参観された先生方からの御意見を「指導上の留意事項」に囲み線で改善案として示しています。
・この資料に記載されている「既習の学習内容である学習課題を基にA『問題を見いだす』数学的活動」や「未習の学習内容である学習課題を対してB『見通しを立てる』数学的活動」、「マスめがね」などについて詳しく知りたい方は、当センターHPの研究論文を御覧ください。

SPEC 滋賀県総合教育センター
Shiga Prefectural Education Center



研究員　長井翔也

## 【数学Ⅰ「連立不等式」(数研出版　新編数学Ⅰ)における実証授業の指導計画とその授業の実際】

## 1　はじめに

数学Ⅰ「連立不等式」(数研出版　新編数学Ⅰ)を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基にA「問題を見いだす」数学的活動を行った。生徒は、この授業までに一次不等式についての学習を一通り終えている。そして、本時の授業において「連立不等式を表す数直線について、他にどんな数直線が考えられるか」という学習課題に取り組んだ。この時期に学習する連立不等式においては、解のパターンが限定的であることや、連立不等式の解の意味を理解せず、特定の解法パターンに当てはめる生徒が多く見られる。そのようにして解に至る場合、連立不等式についての本質的な理解が浅いと考えられる。そこで、共通部分の多様さに気付いたり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができるように授業を構想した。

## 2　指導の計画と方法(指導上の工夫)

### (1)　単元の目標

・不等式の解の意味や不等式の性質について理解し、一次不等式の解を求めることができる。(知識及び技能)
・問題を解決する際に、既に学習した計算の方法と関連付けて、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
・不等式の性質を基に一次不等式を解く方法を考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
・日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、一次不等式を問題解決に活用することができる。(思考力、判断力、表現力等)
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

### (2)　評価規準

| 知識・技能<br>知 | 思考・判断・表現<br>思 | 主体的に学習に取り組む態度<br>態 |
|---|---|---|
| ●不等式の解の意味や不等式の性質について理解し、一次不等式の解を求めている。 | ●問題を解決する際に、既に学習した計算の方法と関連付けて、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりしている。<br>●不等式の性質を基に一次不等式を解く方法を考察している。<br>●日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、一次不等式を問題解決に活用している。 | ●事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画（枠内が本研究で扱った学習内容である）

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
|---|---|---|
| 1 | ●不等式の性質 | ・不等号の向きの変化といった、不等式の性質について理解できる。 |
| 2 | ●一次不等式 | ・不等式の性質を基に、一次不等式の解を求めたり、一次不等式を解く方法を考察したりすることができる。 |
| 3 | ●連立不等式 | ・一次不等式を解く方法を活用し、連立不等式の解法について理解できる。 |
| 4 | ●日常生活や社会の事象と関連付けた一次不等式 | ・日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、一次不等式を問題解決に活用することができる。<br>・事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断したりすることができる。 |
| 5 | ●絶対値を含む一次不等式 | ・問題を解決する際に、既に学習した計算の方法と関連付けて、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりできる。 |
| 6 | ●連立不等式の問題の作成 | ・連立不等式を表す数直線を基に問題を作成する取組により、共通部分の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。 |
| 7 | ●前時に作成した問題を通じての交流 | ・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとすることができる。<br>・グループで出た意見をクラス全体に共有することで、共通部分の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。 |

（４） 学習の展開例

第６時（連立不等式の問題の作成）の展開例

◎学習の目標
・連立不等式を表す数直線を基に問題を作成する取組により、共通部分の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 7分 | ●数学の世界の拡張についてふれる。例：正の数から負の数。平方根の概念の獲得等。<br>◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「この授業では、問題を | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を見いだすことが目的である」ことを伝える。<br><br>◇教科書の例31(１)を解答する。 | | ・ |

＜課題１＞次の連立不等式を解け。 $\begin{cases} x \geqq -2 \\ x < 5 \end{cases}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ☆教科書を見て考えようとする。<br>☆解として、含む値と含まない値を判断する。<br>☆教科書に載っている解法に沿って解く。 | 【改善案①】<br>生徒の実態に応じて＜課題１＞を家庭学習にすると、本時の授業で大切にしたい部分の時間がとれる。 |
| 15分 | ◇連立不等式の意味を理解する。 | | |

＜課題２＞連立不等式を表す数直線について、＜課題１＞以外にどのような数直線があるのか考えよう。

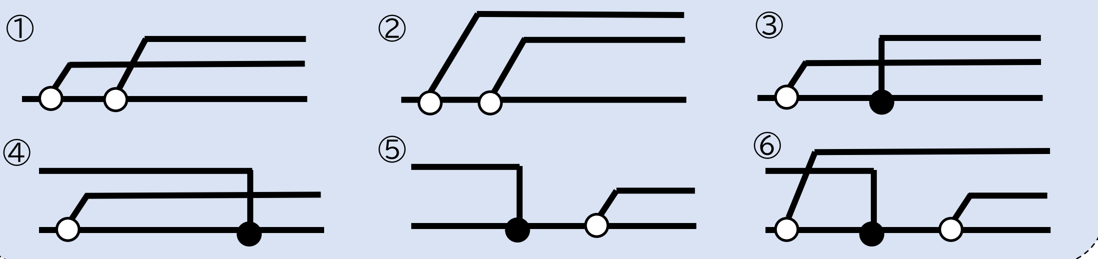
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ・意見交流を図りたい生徒のために教室内の移動を可とする。 |
| | ◇生徒は、ロイロノートの「マスめがね」を使って、数学的な見方・考え方を働かせるようにする。 | | ・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるようロイロノートを通じて、「マスめがね」を生徒に提示する。 |

＜「マスめがね」による提示＞
・【＞】や【≧】といった【イコール】の有無を使い分けるとどうなるかな。
・教科書　例31以外の数直線はないかな。
・不等式が３つある連立不等式の時は、どのような数直線を示すのだろうか。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ☆今まで解いてきた問題を振り返りながら、＜生徒の考えの例①～④＞のような数直線を記述する。また、①、②は何か違いはあるのか考える。<br>☆＜生徒の考えの例⑤＞のように、重ならない数直線もあるのではないか。 | 【改善案②】<br>生徒の実態に応じて、指導者が「マスめがね」を基に＜課題２＞について具体例を示すと、生徒の学習活動が進みやすくなる。 |

| 時間 | 学習活動 | 発問 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|---|
| | | ☆教科書には、載っていないけれど、＜生徒の考えの例⑥＞のような共通部分になると、どんな解を得られるのだろうか。<br>☆このような数直線のとき、連立不等式はどのように立式されているのだろうか。 | ・単に４つ、５つと式を増やすような考察を目的とせず、自分が疑問に思うような数直線を作成させる。<br><br>・具体的な数値を記述した数直線を記述させる。 |

＜生徒の考えの例＞




| 時間 | 学習活動 | 発問 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|---|
| 25分 | ◇自身で示した数直線を立式する。 | | |

＜課題３＞＜課題２＞のような連立不等式を表す数直線を基に、連立不等式の問題を作成しよう。

| 時間 | 学習活動 | 発問 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|---|
| | ◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。 | | ・ルーブリックを活用して、問題を作成する際の達成基準を示す。 |

＜ルーブリック＞

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 分数や平方根など、整数以外の数値を数直線上に表現したり、教科書　例31に載っていない数直線を表現したりする問題を作成した。 | 教科書　例31に載っていない数直線が表現されている問題を作成した。 | 教科書　例31に載っている数直線が表現されている問題を作成した。 | 問題を作成しようとした。 |

【改善案③】
ルーブリックについては、本時の目標により即したものに改編した方がよい(p.11 の図５参照)。

| 時間 | 学習活動 | 発問 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|---|
| | ◇自分が作成した問題を一つ選び、ロイロノートの「提出物」に提出する。 | | ※思<br>連立不等式を表す数直線を基に問題を作成する取組により、共通部分の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3<br>分 | ◇授業のまとめと次回の授業について把握する。<br><br>●連立方程式にも通じる「かつ」「または」についての理解や、共通部分の多様さについてふれる。また、次回の授業では、作成した問題を解きあったり、ルーブリックを活用して、相互評価をしあったりすることを伝える。 | | |

準備物
・１人１台端末・大型提示装置

第７時（前時に作成した問題を通じての交流）の展開例

◎学習の目標
・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとすることができる。（主体的に学習に取り組む態度）
・グループで出た意見をクラス全体に共有することで、共通部分の多様さに気付いたり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 30<br>分 | ◇自分で作成した問題をグループで解きあったり、ルーブリックを基に相互評価したりする。 | | |
| | ＜課題１＞各自で作成した問題をグループ内で解きあったり、相互評価したりしよう。 | | |
| | ◇各自で作成した問題を１問選択し、４人グループで問題を解き合う。<br>◇問題づくりの際に、工夫した点についてグループで話し合う。<br>◇発表を聞いた３人は、ルーブリックを基にした評価をして、理由とともに発表者に伝える。そして、ロイロノートの「送る」機能を活用して、発表者に相互評価シートを提出する。 | ☆どうやって解くのだろうか。<br><br>☆特定の値のみの解答や、解なしといった教科書に載っていない共通部分もあるのか。 | ・解答できなかった生徒は、出題者にどのように解くのか聞くよう指示をする。<br>・ルーブリックと照らし合わせて改善点などを発表者に伝える。<br>・評価の根拠を具体的な理由とともに述べるように指示をする。<br>※態<br>生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとすることができる。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15分 | ◇共通部分の多様さを把握し、連立不等式の意味を理解する。 | | |
| | ＜課題２＞グループの中の工夫された問題を一つ選び、連立不等式を表す数直線をクラス全体に共有しよう。 | | |
| | ◇グループ内で疑問に感じた連立不等式を表す数直線をロイロノートの「提出物」機能を活用して、提出する。<br>●提出された数直線をクラス全体に共有し、連立不等式を表す数直線について生徒に発問する。 | | ※思<br>グループで出た意見をクラス全体に共有することで、共通部分の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について考察したりすることができる。 |
| 5分 | ◇今回の学習の過程をロイロノート上にまとめ、提出する。 | | |

準備物

・１台１台端末・大型提示装置

## 相互評価シート

（　　　　　　　　　　　　）さんの作成した問題を評価しよう

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 分数や平方根など、整数以外の数値を数直線上に表現したり、教科書 例31に載っていない数直線を表現したりする問題を作成した。 | 教科書 例31に載っていない数直線が表現されている問題を作成した。 | 教科書 例31に載っている数直線が表現されている問題を作成した。 | 問題を作成しようとした。 |

| 感想<br>・<br>アドバイス | |
|---|---|

（　　　）年　（　　　）組　（　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　）

（５） 指導上の工夫について(第６時、第７時)

本授業全体の指導の工夫として、連立不等式を計算して解答することを目的とせず、連立不等式を表す数直線を基に生徒自身で条件を変更して、「共通部分がどのように変わるのか」や、「連立不等式が表す解はどのような意味をもつのか」などについて考察することを重視している。この取組により、数学が得意な生徒だけでなく、計算が苦手であったり連立不等式の解法の意味について理解が不十分だったりした生徒にとっても、計算ではなく、数直線を基に考察することで、連立不等式とはどのようなものなのかといった本質的な理解につながると考える。

授業の冒頭では、既習の学習内容を確認することを重視する。生徒が自身で学習内容を発展させたり拡張させたりするためには、土台となる知識が必要不可欠である。そのため、授業の冒頭に連立不等式の解法について確認を行う。そして、その確認をする際に、その学習の解決過程を振り返ることを通して、「この連立不等式を表す数直線の条件や数値を変えるとどのような結果が得られるのか」といった問いをもてるように指導者が発問することで、生徒の興味・関心を引き立たせて、その後の生徒の学習活動を主体的に取り組めるようにつなげる。一方で、このような授業について構想する際には、学校の実態に応じて考察するための指針をどの程度示すかということを考える必要もある。数学が苦手な生徒にとっては、今まで学習してきた連立不等式を表す数直線からなかなか発展させられないことが推察されるため、指導者による「【<】と【≦】を使い分けるとどうなるか」や「不等式が３つある連立不等式の時は、どのような数直線を示すのだろうか」などの指針を示す必要があると考える。本研究ではこれらの指針を「マスめがね」を通じて生徒に示す。このような指導者による仕掛けにより、連立不等式の多様さを把握したり、連立不等式の解の意味について自身で理解したりすることにつながると考える。

３ 授業の実際(第６時、第７時)

授業では、第６時の授業の冒頭に提示した＜課題１＞を解答することに困難さを感じていた生徒が多くいた。そのため、この学習課題に取り組み、指導者による解説を聞くことで、生徒は連立不等式の基本的な解法等の既習の学習内容について確認することにつながったと考えられる。そして、＜課題１＞についてその解決過程を振り返る際に、連立不等式を表す数直線について、他にどんな数直線が考えられるのかを発問した。連立不等式を表す数直線について考察することで、「今までは共通部分のある連立不等式の問題を解いてきたが、共通部分のない連立不等式の問題もあるのではないか」といった考察をした生徒ａの記述や、「連立不等式を表す数直線において、特定の数値のみが共通部分として重なっている状態で、それぞれの式がその数値を含むとき(≧)と含まないとき(＞)で

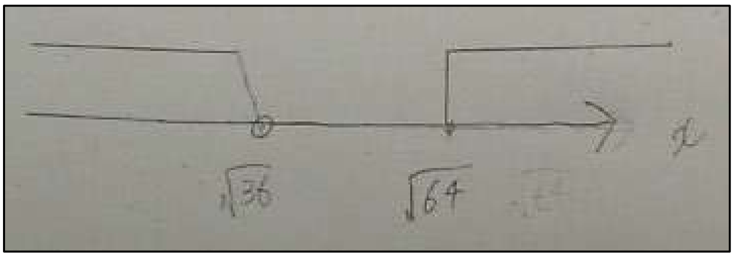



図１ 共通部分をもたない連立不等式を表す数直線を表した生徒ａの記述

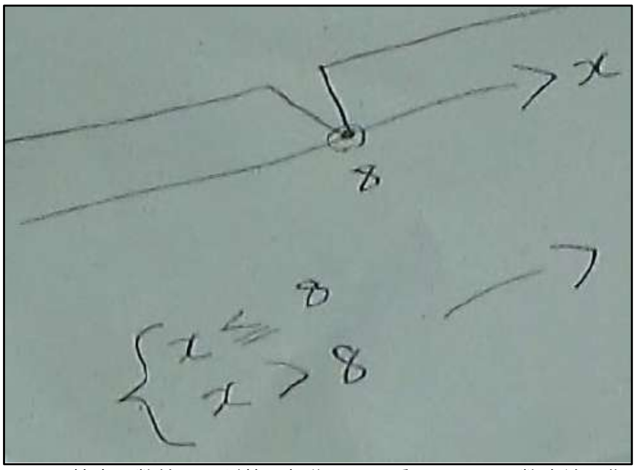


図２ 特定の数値のみが共通部分として重なっている数直線を作成した生徒ｂの記述

表されると、どのような解をもつのだろうか」といった考察をした生徒ｂの記述が見られた。このように生徒自身で条件を変更して、今まで学習してきた内容を更に発展させて考察する様子が多数見られた。また、「連立不等式に絶対値を含めると共通部分はどうなるだろう」といった共通部分が二つに分けられた解を示す数直線を作成し、既習の学習内容を取り入れながら、共通部分の多様さに気付く生徒ｃの記述が見られた（図３）。また、この取組により発展的な内容だけでなく、生徒自身で数直線を記述したことで、「『２分の１』か『10分の１』どちらが大きいのか」といった数値の大小関係について数直線を基に理解したり、連立不等式と連立方程式の共通点について協議したりする生徒の姿も見られ、既習の学習内容と関連付けて統合的に学習を進めている様子も見られた。さらに、生徒同士でルーブリックを基に相互評価する場面では、「連立不等式の解において、共通部分をもたない解を表現した問題があるとは想像もつかなかった」といった教科書に記載されていない数直線が表現されていることを評価し、それを通じて自身の新たな学びにつなげる生徒ｄや、「分母に√をいれると（問題が）難しくなるのではないか」といったルーブリックのＡ評価を基に他者にアドバイスする生徒ｅの様子が見られた（図４）。

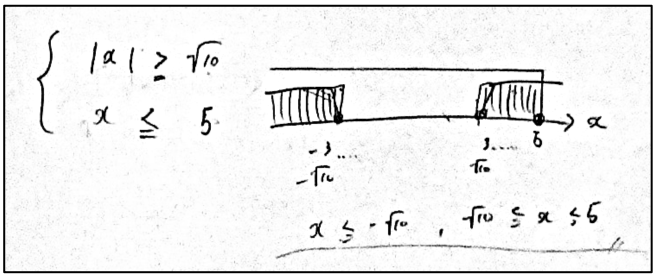
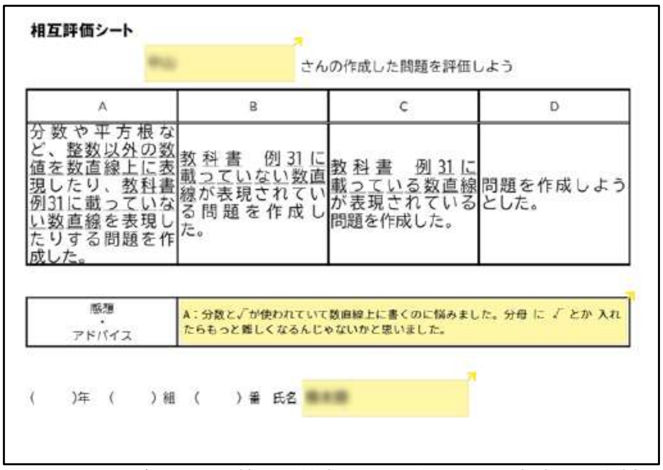


図３　絶対値を含む連立不等式の学習課題を作成した生徒ｃの記述


相互評価シート

さんの作成した問題を評価しよう

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 分数や平方根など、整数以外の数値を数直線上に表現したり、教科書例31に載っていない数直線を表現したりする問題を作成した。 | 教科書　例31に載っていない数直線が表現されている問題を作成した。 | 教科書　例31に載っている数直線が表現されている問題を作成した。 | 問題を作成しようとした。 |

| 感想・アドバイス | A：分数と√が使われていて数直線上に書くのに悩みました。分母 に √ とか 入れたらもっと難しくなるんじゃないかと思いました。 |
|---|---|

（　　）年　（　　）組　（　　）番　氏名

図４　ルーブリックを基に、他者にアドバイスする生徒ｅの資料

4　まとめ

（１）　成果

生徒ｄからは「計算が苦手で連立不等式について深く理解していなかったが、（連立不等式を表す）数直線から考えることで連立不等式の多様さについて理解することができた」といった声があり、このような数学的活動により、生徒は共通部分の多様さに気付いたり、連立不等式の解の意味について考察したりすることといった連立不等式についての本質的な理解につながった。

（２）　課題点とその改善案

課題点は２点ある。１点目は、ルーブリックの内容が本時の学習の目標からずれがあったことである。学校の実態に応じて生徒の目指すべき姿をイメージしながら作成するルーブリックの性質上、研究協力校の指導者との協議を通じて、「本校の生徒は計算が苦手なため、Ａ評価に無理数や分数を入れた方がよい」ということから今回のルーブリックを作成した。このルーブリックにより、生徒が作成した問題をそれぞれが解く際に、無理数や分数といった計算をすることで、その技能（計算力）の向上につながった。その一方で、本時のルーブリックには数値についての内容が示されていることから、連立不等式を表す数直線の多様さについて考察していない生徒が一部見られた。本時の学習の目標と育成したい生徒の姿をイメージしながらルーブリックを作成することが重要であると考えたことから、図５のようなル

ーブリックを生徒に提示することで、生徒の数学的活動がさらに充実できると考える。

＜ルーブリック（改訂）＞

| A | B | C | D |
| --- | --- | --- | --- |
| 「これはどんな解になるかな」と相手が疑問に思うような数直線が表現されている問題を作成した。 | 教科書例31に記載されていない数直線が表現されている問題を作成した。 | 教科書例31に載っている数直線が表現されている問題を作成した。 | 問題を作成しようとした。 |

図５　本研究におけるルーブリックの改善案

２点目は、生徒が記述した連立不等式を表す数直線を基にどのようにして授業をまとめるのかについてである。生徒それぞれが思うままに数直線を記述したことで、多様な数直線が共有されたことになり、クラス全体で確認しておきたい学習内容がまとめきれなかった。改善案としては、指導者が生徒の提出内容を基に、共通部分の多様さに気付いたり連立不等式の解の意味について考察したりすることができるような問題を授業後に取り上げ、それを家庭学習の課題することで、本時の授業の学習内容がより定着できると考えられる。

【数学Ⅰ「二次関数の決定」（数研出版　新編数学Ⅰ）における
実証授業の指導計画とその授業の実際】

## １　はじめに

数学Ⅰ「二次関数の決定」（数研出版　新編数学Ⅰ）を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基にA「問題を見いだす」数学的活動を行った。生徒は、この授業までに二次関数の決定を除く二次関数のすべての内容について学習している。そして、本時の授業で「二次関数を決定するための条件として、何が必要なのか考察せよ」という学習課題に取り組んだ。この学習課題を設定した理由としては、生徒が自身の既習の学習内容を関連付けて、二次関数を決定する条件を自身で見いだすことができれば、二次関数の式やグラフと二次関数を決定する条件とのつながりを感じ、それらが相互に関係していることについて感じられると考えたためである。

## ２　指導の計画と方法（指導上の工夫）

### （１）　単元の目標

・二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。（知識及び技能）
・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。（知識及び技能）
・二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解することができる。（知識及び技能）
・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。（知識及び技能）
・二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。（思考力、判断力、表現力等）
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。（学びに向かう力、人間性等）

### （２）　評価規準

| 知識・技能<br>知 | 思考・判断・表現<br>思 | 主体的に学習に取り組む態度<br>態 |
|---|---|---|
| ●二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解し、二次関数の最大値や最小値を求めている。<br>●二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解している。<br>●二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めている。 | ●二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 | ●事象を二次関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価･改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
| --- | --- | --- |
| 1<br>～<br>2 | ●関数の値・一次関数 | ・関数について理解し、関数の値を求めることができる。<br>・傾きと切片に着目して、一次関数のグラフを書くことができる。 |
| 3<br>～<br>9 | ●二次関数のグラフ | ・二次関数の式の変化をグラフの平行移動とみて考察することができる。<br>・二次関数の軸と頂点を求め、グラフを書くことができる。<br>・二次関数の値の変化をグラフから考察することができる。 |
| 10<br>～<br>12 | ●二次関数の最大値、最小値 | ・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。<br>・日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。 |
| 13<br>～<br>15 | ●二次関数の決定<br>（本時：第１４時） | ・二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。<br>・与えられた条件から二次関数の式を求めることができる。 |
| 16<br>～<br>17 | ●二次方程式の解、二次関数のグラフとx軸との共有点 | ・二次関数のグラフとx軸との共有点のx座標を求めることができる。<br>・二次関数のグラフとx軸との共有点の個数や位置関係を二次関数と関連させて考察することができる。 |
| 18<br>～<br>21 | ●二次関数のグラフと二次不等式、二次不等式の解 | ・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。 |

（４） 学習の展開例

第１４時に向けての家庭学習

| ◇学習活動 | ・指導上の留意点 |
| --- | --- |
| ◇教科書p104練習21の問題を解く。 | |
| ＜課題１＞次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。<br>(１)頂点が点（1，－3）で、点（3，5）を通る<br>(２)軸が直線x＝−1で、２点（0，5）、（2，－11）を通る | |
| ◇課題を解き、ロイロノートの「提出箱」に提出する。 | |

## 第１４時(二次関数の決定)の展開例

◎学習の目標
・二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。(思考・判断・表現)

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 15分 | ◇今回の授業の目的を理解する。<br>●「この授業では、問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を発見することが目的である」ことを伝える。<br>◇家庭学習の内容を振り返る。 | | |

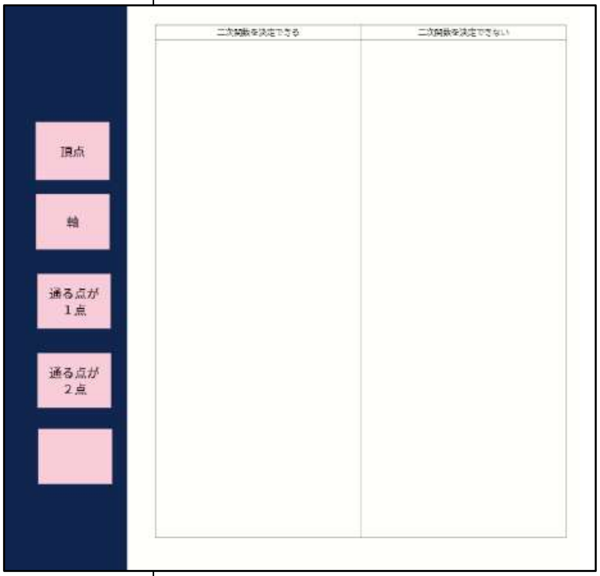
＜課題１＞次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。
(１)頂点が点（1，−3）で、点（3，5）を通る
(２)軸が直線$x=-1$で、２点（0，5）、(2，−11）を通る

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| | ●生徒の記述を基に、どのように解答したか発問する。 | ☆平方完成した式に条件を当てはめて、二次関数を求めた。 | ・$y=a(x-p)^2+q$を活用して、問題を解いてくることから、黒板に$y=a(x-p)^2+q$を記述する。 |
| | ●「実験プリント」を使って、(１)のグラフをかくように伝える。 | | |
| | ●例えば、頂点や通る点の値を変更しても、二次関数を求めることができるのかな。確かめてみよう。 | ☆できるのかな・・・。<br>☆式は変わるけど、二次関数を求めることができた。 | |
| | ●＜課題１＞の条件である「頂点と通る１点」を「頂点のみ」にすると二次関数はどうなるのかな。 | ☆二次関数はできない。<br>☆なんだろう・・・。 | ・「実験プリント」を使って、生徒に確かめてもらう。<br>・「頂点のみ」の条件だと二次関数が決定できないことも伝える。<br>・「二次関数を決定する」ということについてふれる |
| | ●二次関数の式を求める条件として、何が分かれば二次関数を求めることができるのかな。 | 【改善案①】<br>「実験プリント」を活用する際に、ロイロノートの「共有ノート」を活用して生徒全体の考えを共有すると、二次関数を決定する条件とはどういうものなのかイメージしやすい。 | |

25分

<課題２>二次関数を決定するための条件として、何が必要なのか考察せよ。

●ロイロノートを活用して、どの「カード」を組み合わせたら二次関数が決定できるのか考えよう。その際、「実験プリント」を活用して、どの条件であれば、二次関数を決定できるのか調べよう。




・入力されていない「カード」については各自で必要な条件を打ち込むように指示する。

◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入ってある「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。

<「マスめがね」による提示>
・二次関数$y = a(x-p)^2+q$で考えると、どのようなことがわかるのかな。
・二次関数$y = ax^2+bx+c$で考えると、どのようなことがわかるのかな。
・二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせには何の違いがあるのかな。

◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。

・ルーブリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。

<ルーブリック>

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて<u>５つ以上</u>作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて<u>３つ以上</u>作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて<u>１つ以上</u>作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、作成しようとした。 |

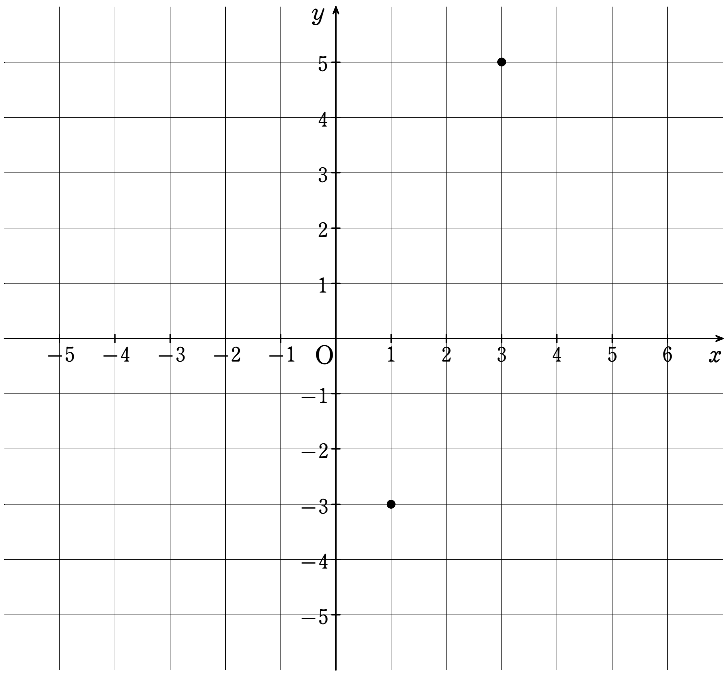
●<課題１>からなにかわかることはないかな。

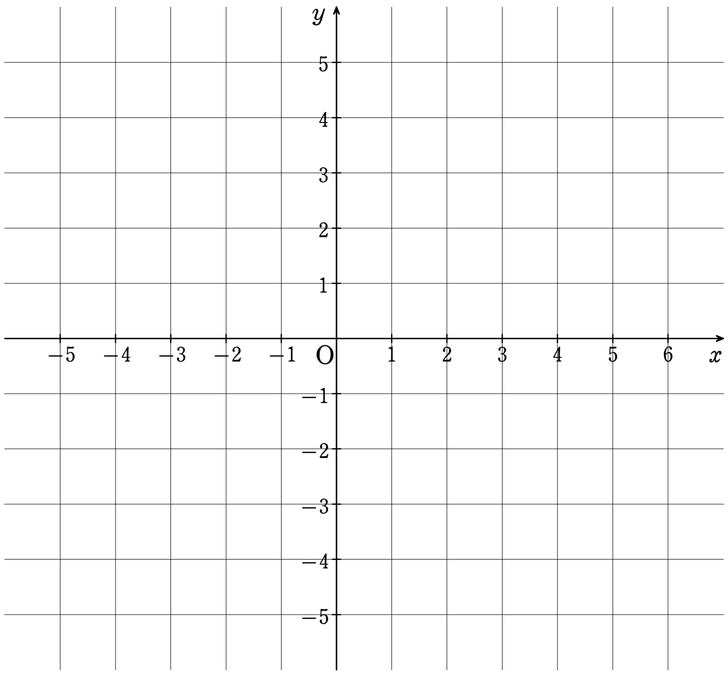
☆「頂点と通る１点」「軸と通る２点」が分かれば、二次関数が決定できる。

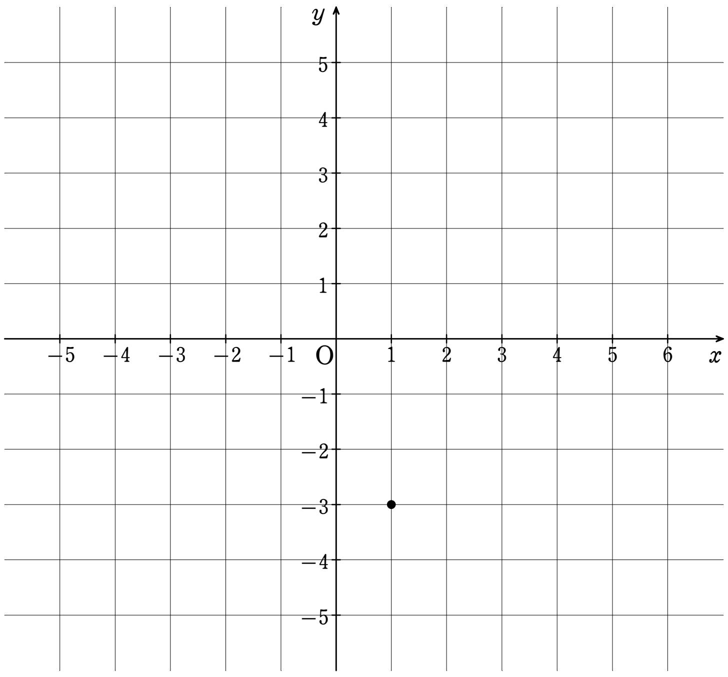
| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●二次関数を決定できない条件についてもロイロノートに示されているカードを基に考えてみよう。 | | ・決定できない条件を考えることも大切であることをおさえる。 |
| | ●＜課題１＞（１）の解答である $y = 2(x-1)^2 - 3$ を変形することはできないかな。 | ☆ $y = 2x^2 - 4x - 1$ になる。 | |
| | ● $y = 2x^2 - 4x - 1$ は二次関数ではないのかな。 | ☆二次関数である。 | ・これら二つの式は同じ２次関数であることをおさえる。 |
| | ●では、この展開された式（標準形）でも考察してみよう。 | | ・黒板に示した $y = a(x-p)^2 + q$ の隣に $y = ax^2 + bx + c$ を記述する。 |
| | ●二次関数<br>$y = a(x-p)^2 + q$ と<br>$y = ax^2 + bx + c$ の２種類について、未知の文字が二つあれば、二つ式が必要であるといったことについて考察していれば、全体で共有する。 | | ※思<br>二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。 |
| 10<br>分 | ●生徒の提出内容を基に、二次関数を決定する条件について、まとめる。 | ☆軸と通る２点が必要である。<br>☆３点を通る | |
| | ●これらの条件によって、二次関数のグラフが本当にかけるのか、「実験プリント」を使って確認させる。 | | ・グラフを通して、４点を通ることについて、指導者から生徒に問いかけ、３点が分かれば、条件として成り立つことを説明する。<br>・「頂点と通る１点」「軸と通る２点」「通る３点」がわかると二次関数が決定できることについて、生徒への発問を通して、伝える。 |
| | ●二次関数を決定するためには、未知の文字を求めることができる条件が必要であることを理解させる。 | | |

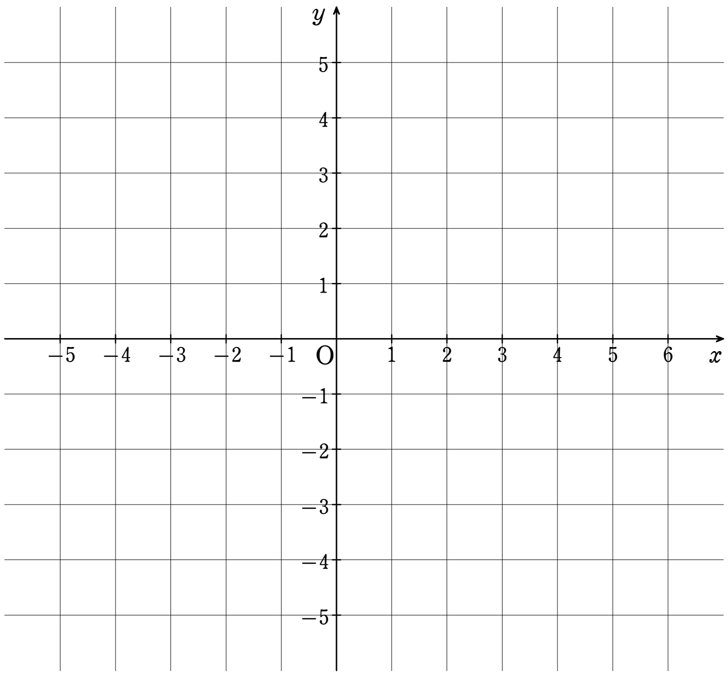
準備物
・１人１台端末・大型提示装置

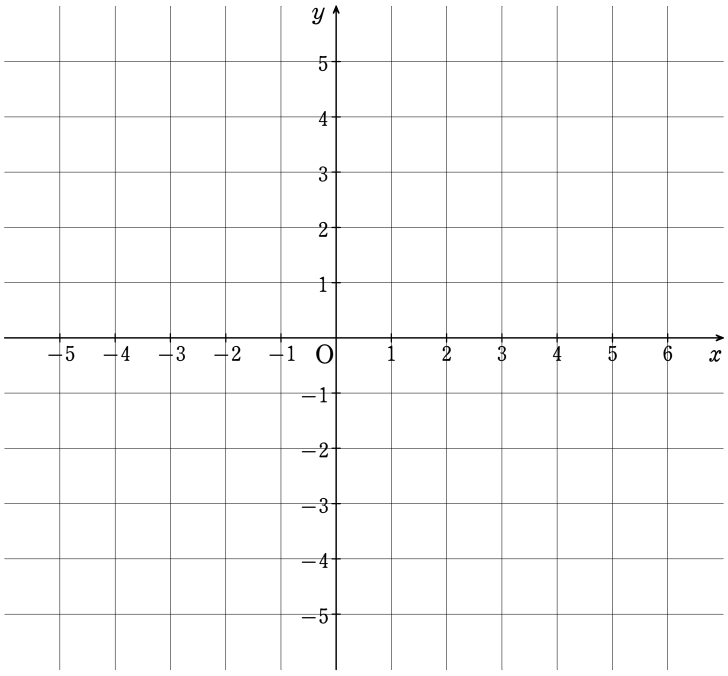
実験プリント（二次関数のグラフを決定する条件を見つけよう）　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

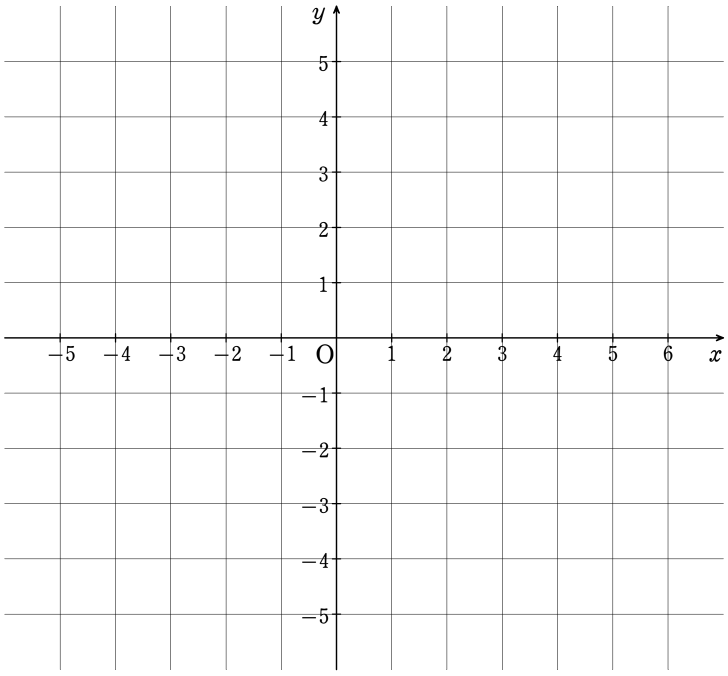


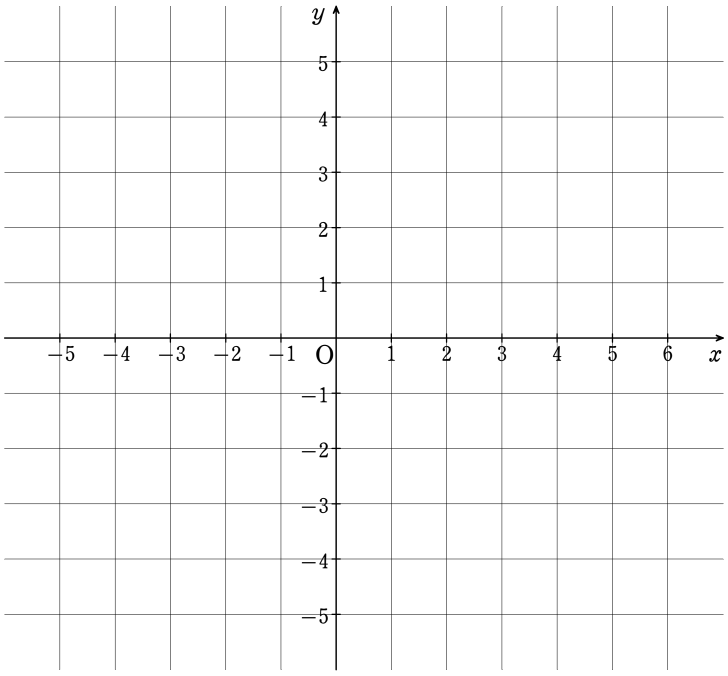



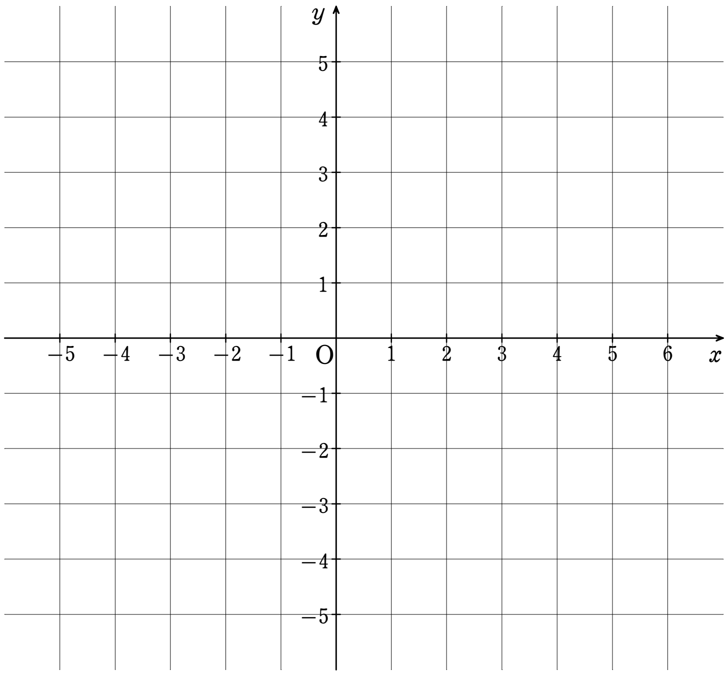



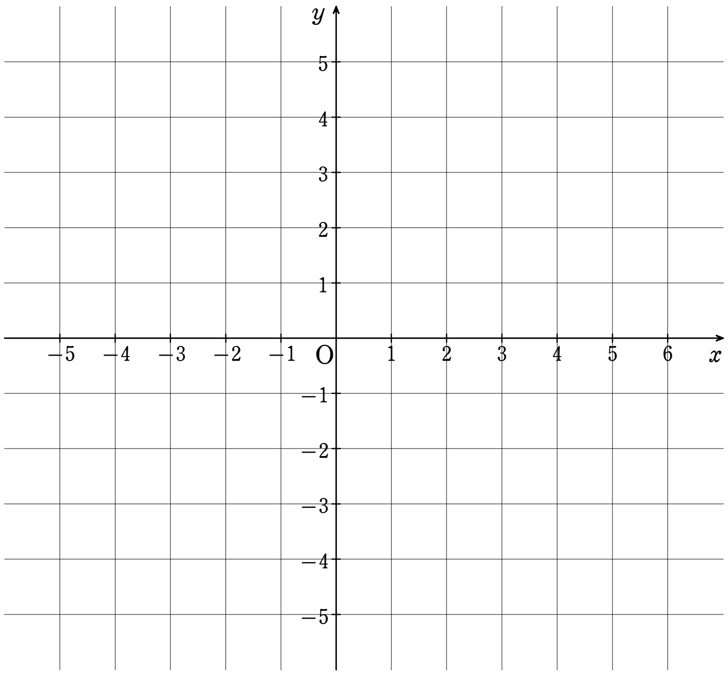



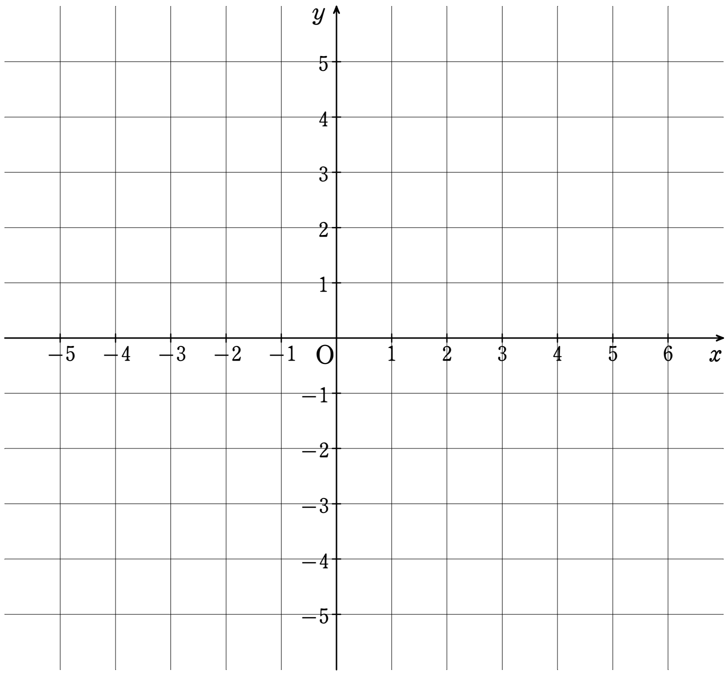



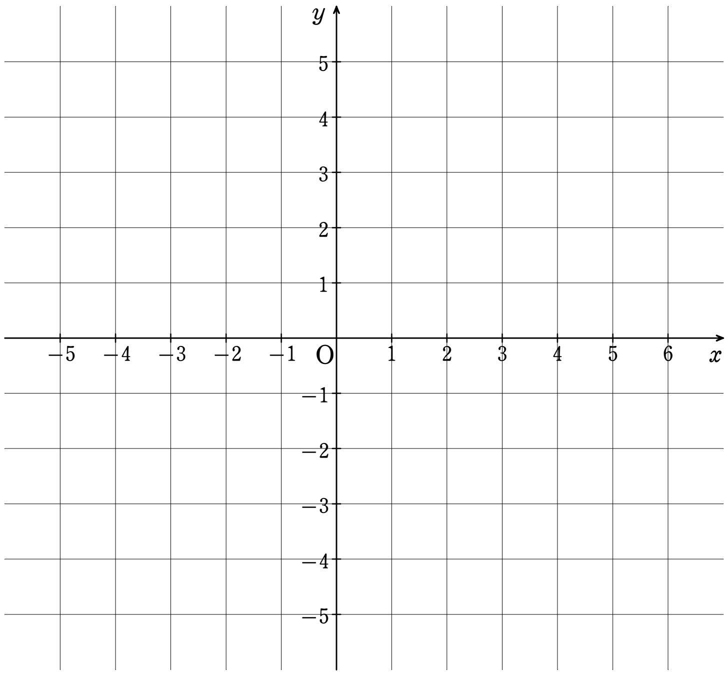
実験プリント（二次関数のグラフを決定する条件を見つけよう）　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　）

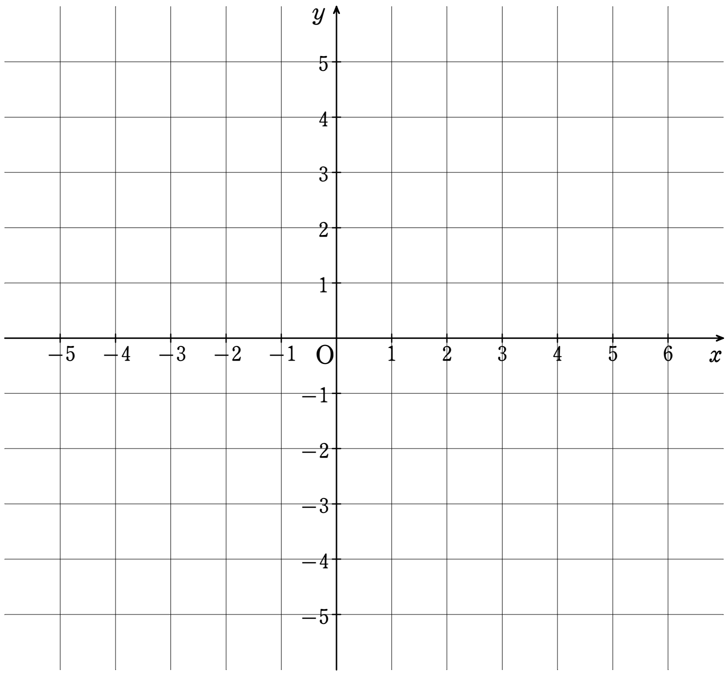


## 二次関数（二次関数を決定する条件を見つけよう）

＜課題１＞次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。

| （１）頂点が点（2，5）で、点（−1，−4）を通る |
|---|
| |

| （２）軸が直線 x=-1 で、２点（0，5）、(2，−11）を通る |
|---|
| |

＜課題２＞

| 二次関数を決定するための条件は、一般的に何が必要なのか考察せよ。 |
|---|

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて５つ以上作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて３つ以上作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて１つ以上作成した。 | 二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、作成しようとした。 |

・私の達成基準は（　　　　　）です。

| 二次関数を決定できる | 二次関数を決定できない |
|---|---|
| 例<br>頂点と通る１点 | |
| これだとどのような条件なのか | |
| | |
| | |
| | |
| | |

【改善案②】
生徒がグラフと数式を関連付けて考えるためには、例示する必要があったことから、「例　頂点と通る１点」のように示すと二次関数を決定する「条件」とは何なのか考察しやすくなると考える。

## （５） 指導上の工夫について(第１４時)

指導の工夫として、生徒に二次関数を決定するということがどのような状態を指しているのか、グラフを基に実感できるようにすることである。授業の冒頭では、グラフに記載された「頂点と通る１点」という２点の条件を基にグラフをかくことを行う。すると、グラフがただ一つに定まる、つまり二次関数が決定されることを生徒に実感できるようになる。その次に、「頂点のみ」という１点のみの条件を基にグラフをかくことを行う。すると、無数の二次関数のグラフがかけることを生徒が確認することにつながり、二次関数が決定できないことを実感できるようになる。このように、二次関数を決定「できる」場合と「できない」場合を生徒に実感できるようにすることで、「どんな条件ならば二次関数が決定できるのか」という学習課題に対して生徒が解決したいと感じ、その後の数学的活動を充実させる。

## ３ 授業の実際(第１４時)

授業の冒頭において、生徒は前時に学習した「『頂点と通る１点』と『軸と通る２点』を基に二次関数を求めよ」という学習課題について確認した。その後、生徒はその学習課題の解決過程を振り返る際に、「『頂点と通る１点』の数値が変更されても、二次関数は決定できるのか」や「『頂点のみ』の条件だと二次関数は決定できないのか」という指導者による問いかけについて考察した(図１)。そして、生徒はこれらの考察を通じて「二次関数を決定する条件として、何が必要なのだろうか」という学習課題に取り組んだ。生徒ａは、指導者が定義した「軸と通る２点」を基にした学習課題について考察し、「『軸と通る１点』だと二次関数は本当に決定できないのか」という問いが生まれ、複数のグラフを記述して、二次関数が決定できないことに自身で気付いた。また、「『頂点と通る１点』だと求めたい文字が一つなので立式として一つ必要である。そして、『軸と通る２点』だと求めたい文字が二つなので式が二つ必要である」といった数学的に考察する生徒ｂの姿が見られた。その生徒は、$y = ax^2 + bx + c$ について、「ａ、ｂ、ｃが分かるようにするためには、ｘ、ｙの組み合わせが三ついる。だから、『通る３点』が分かれば二次関数を決定できる」といった考察をし、自身で二次関数を決定する条件を見いだすことができた(図２)。さらに、「マスめがね」で示された「二次関数$y = a(x-p)^2 + q$で考えると、どのようなことがわかるのかな」を基にしながら、教科書に記載されていない「$y = a(x-p)^2 + q$ におけるａの条件」について他者と協議する生徒の姿が見られた。この協議を通じて、二次関数を決定する条件について発展的に考察する生徒の協議の様子を以下に示す(図３)。

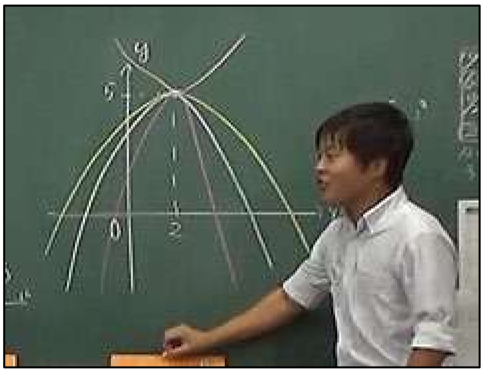


図１ 「頂点のみ」の条件だと二次関数は決定できないことをグラフで示す指導者の様子

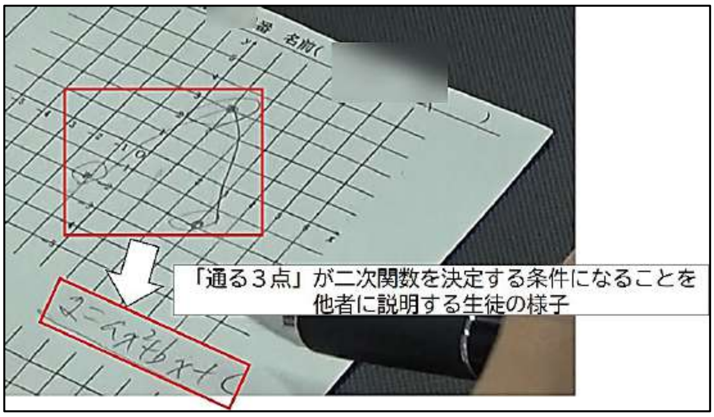
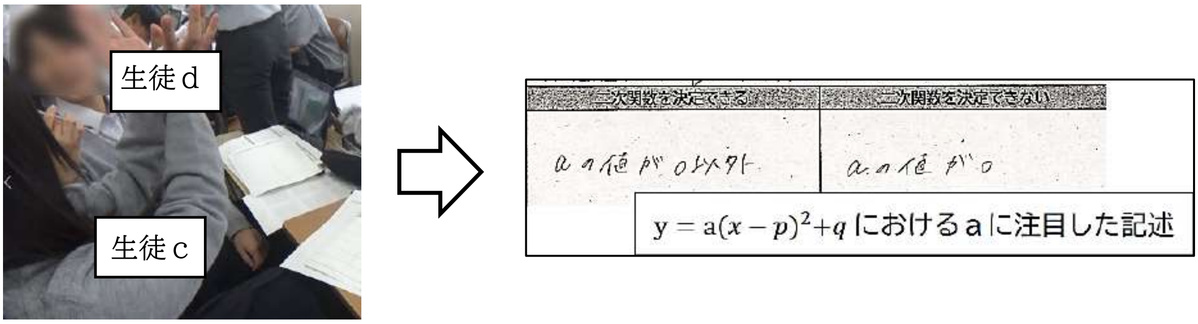



図２ 自身で二次関数を決定する条件を見いだす生徒の様子




生徒ｃ：(「マスめがね」に示されている「$y = a(x-p)^2 + q$」を見ながら)このａはなんだろう。
生徒ｄ：(下に凸と上に凸を表すジェスチャーをしながら)これとこれを表すものかな。
生徒ｃ：これらは、正と負のときに表すものだよね。０のときはどうなるの。
生徒ｄ：０のときは・・・わからない。
生徒ｃ：そもそもａが０になったらだめだと思う。だって、 $x^2$が消えるから。
生徒ｄ：たしかに。

図３　教科書に記載されていない二次関数を決定する条件について協議している生徒の様子

## ４　まとめ

### （１）　成果

　このような数学的活動を通して、二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことで、グラフと数式の関係について理解を深める一助となった。

### （２）　課題点とその改善案

　課題点は、より多くの生徒がグラフと数式を関連付けて考えるためには、更なる仕掛けが必要であったことである。この実践における目標が「二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる」であるが、生徒全員が１単位時間でその思考にはたどり着かなかった。その理由として考えられることは２点ある。

　１点目は、二次関数を決定する「条件」とは何なのか、生徒の理解が得にくく、この学習課題を進める際に一部の生徒に混乱があったことである。改善案については、授業の冒頭で、指導者による「頂点と通る１点」という二次関数を決定する条件の提示を基に学習プリントに例示すると、生徒は二次関数を決定する「条件」の示し方が伝わったのではないかと考える(p.19参照)。その後の数学的活動においても、＜課題１＞を基に例示したことで、＜課題２＞はどうなのかという思考にたどり着き、二次関数を決定する条件について円滑に考察できるのではないかと考える。

　２点目は、数学の授業において、条件を変更したり定義や性質について自身で見いだしたりする機会が少ないことにより、この授業のような自身で二次関数を決定する条件を見いだすという思考に慣れていない生徒がいたことである。指導者が学習課題を提示し、それを生徒が解答するという「問題を解決する」過程を重視する授業だけでは、自立的に条件を変更したり問題を拡張したりして考察することに生徒が困難さを感じたのではないだろうか。単元に１回、学期に１回でも生徒が自立的に条件を変更したり定義や性質について見いだしたりする授業を行うことで、この授業だけでなく、普段の授業においても生徒が自立的に「問題発見・解決の過程」を遂行しようとすることにつながるのではないかと考える。

## 【数学Ⅱ「対数を含む方程式・不等式」(数研出版　高等学校数学Ⅱ)における実証授業の指導計画とその授業の実際】

### 1　はじめに

数学Ⅱ「対数を含む方程式・不等式」(数研出版　高等学校数学Ⅱ)を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基に[A]「問題を見いだす」数学的活動を行う。対数を含む方程式・不等式の問題は、log という初めて見る記号であることもあり、「底の条件がなぜ限定されているのか」や、「なぜ教科書に記載されている公式には対数同士の足し算や引き算はあるのに、掛け算や割り算はないのか」などといった疑問は本来感じやすい。しかし、疑問を感じる前に、指導者による解説を基に学習活動が進んでしまうことから、生徒自身で問いを生み出す機会が少ないと考えられる。また、解法パターンに当てはめて解答する生徒も多くみられる。そのようにして解に至る場合、対数についての本質的な理解が浅いと考えられる。そこで、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができるよう、「自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する」という学習課題を基に授業を構想した。

### 2　指導の計画と方法(指導上の工夫)

#### (1)　単元の目標

・対数の意味とその基本的な性質について理解し、簡単な対数の計算をすることができる。(知識及び技能)
・対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。(知識及び技能)
・指数と対数を相互に関連付けて考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
・指数関数及び対数関数の式とグラフの関係について、多面的に考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

#### (2)　評価規準

| 知識・技能<br>[知] | 思考・判断・表現<br>[思] | 主体的に学習に取り組む態度<br>[態] |
|---|---|---|
| ●対数の意味とその基本的な性質について理解し、簡単な対数の計算をしている。<br>●対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解している。 | ●指数と対数を相互に関連付けて考察している。<br>●指数関数及び対数関数の式とグラフの関係について、多面的に考察している。 | ●事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画（枠内が本研究で扱った学習内容である）

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
|---|---|---|
| 1 | ●対数の定義 | ・対数の意味とその基本的な性質について理解し、指数関数との関係を理解することができる。 |
| 2 | ●対数の性質 | ・対数の意味とその基本的な性質について理解し、対数の計算をすることができる。 |
| 3 | ●対数関数のグラフ | ・対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。 |
| 4 | ●対数関数を含む方程式、不等式 | ・対数の定義や性質を正しく用いて、対数の方程式や不等式を解くことができる。 |
| 5 | ●常用対数の基本事項 | ・常用対数の有用性を理解し、常用対数表を用いて計算することができる。 |
| 6 | ●常用対数の応用 | ・対数の性質や常用対数表を適切に用いることができる。 |
| 7 | ●対数を含む方程式・不等式の問題の作成 | ・自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。 |

（４） 学習の展開例

第７時（対数を含む方程式・不等式の問題の作成）の展開例

◎学習の目標
・自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 5分 | ●数学の世界の拡張についてふれる。例：正の数から負の数。平方根の概念の獲得等。<br>◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「この授業では、問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を見いだすことが目的である」ことを伝える。 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12分 | ◇教科書p172例題６（１）を解く。 | | |

＜課題１＞方程式　$\log_2 x = 3$　を解け。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ☆x＝8 | |

＜課題２＞＜課題１＞を基に、問題を自身で作成しよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●問題は複数作成することを伝える。<br><br>◇生徒は、ロイロノートの「マスめがね」を使って、数学的な見方・考え方を働かせるようにする。 | | ・意見交流を図りたい生徒のために教室内の移動を可とする。<br><br>・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるようロイロノートを通じて、「マスめがね」を生徒に提示する。 |

＜「マスめがね」による提示＞
・真数や底を様々な数値や文字に変更すると、この問題はどうなるかな。
・対数同士の和や差など考えると、この問題はどうなるかな。
・方程式を不等式にするとどうなるかな。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。 | | ・ルーブリックを活用して、問題を作成する際の達成基準を示す。 |

＜ルーブリック＞

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 真数や底を変更したり、方程式を不等式にしたりして、その問題に取り組むことで、対数について理解が深まるような問題を自身で作成できた。 | 真数や底を変更したり、方程式を不等式にしたりして、自身で問題を作成できた。 | 問題を作成できた。 | 問題を作成しようとした。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ☆真数を２乗にしたら、どうなるかな。<br>☆底の違う対数同士の和の問題を作ってみようかな。<br>☆底を文字にするとどうなるかな。 | ・問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を発見することが目的であることを再度指示する。 |

【改善案】
生徒が数学的な見方・考え方を働かせた問題を作成できるよう、指導者が対数を含む方程式・不等式の問題を作成した見本を示したり、授業において、生徒が作成した良問を授業の途中に取り上げたりすると、生徒が自身の数学的活動の方向性を確認できる。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20分 | ◇生徒は自身が作成した問題を一つ選び、ロイロノートの「提出物」に提出する。<br>◇班を作り、それぞれが作成した問題を解き合う。 | | |
| | ＜課題３＞各自で見いだした問題をグループ内で解きあってみよう。 | | |
| | ◇４人グループで問題を解き合う。<br>１題５分×４つ | ☆どうやって解くのだろうか。<br>☆この問題の真数条件はどのようになっているのかな。 | |
| 10分 | ◇解答できたり見通しがもてたりした問題は、ロイロノートの「赤色のカード」にその問題を張り、ロイロノートで再提出する。解答できなかったり見通しがもてなかったりした問題は「青色のカード」にその問題を張り、ロイロノートに再提出する。<br><br>◇指導者が取り上げた問題を解答する。（５分） | | |
| | ＜課題４＞生徒が作成した問題について解答する（５分） | | |
| | ◇指導者による解説を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質についてまとめる。（５分） | | ・取り上げる問題については、真数条件や底の条件に関わる問題を取り上げる。<br>例<br>真数に２乗や３乗を含んだ問題<br>底に文字がある問題<br><br>※思<br>自身で対数関数の方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。 |
| ３分 | ◇授業のまとめとして、今回の授業の成果と課題について話す。 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●普段の授業から、与えられたものを単に受け入れるのではなく『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった見方・考え方を働かせることが大切であることを伝える。<br>例：常用対数表など | | |

準備物

・１人１台端末・大型提示装置

## 相互評価シート

（　　　　　　　　　　　　　　）さんの作成した問題を評価しよう

| A | B | C | D |
| --- | --- | --- | --- |
| 真数や底を変更したり方程式を不等式にしたりして、その問題に取り組むことで、対数関数について理解が深まるような問題を自身で作成できた。 | 真数や底を変更したり方程式を不等式にしたりして、自身で問題を作成できた。 | 問題を作成できた。 | 問題を作成しようとした。 |

| 感想<br>・<br>アドバイス | |
| --- | --- |

（　　　）年　（　　　）組　（　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

### （５） 指導上の工夫について（第７時）

本授業の指導の工夫として、生徒が自身の問いを基に自由に条件を変更したり問題を拡張したりできるよう、問題を作成する際にあえて条件は定めなかった。対数を含む方程式･不等式の問題は、log という初めて見る記号であることから何に活用されているのかイメージしづらい。また、対数に関する条件について疑問を感じる前に解法パターンに当てはめることで解答することから、この学習内容についての理解が深まりにくい。そこで、「底を負にするとどうなるのか」や「真数を２乗にするとどうなるのか」といった自身の問いを基に自由に問題を作成し、対数に関して探究することをこの授業では重視した。一方で、生徒自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成しようとすると、高等学校数学の学習範囲では解答できない問題が生まれることが予想される。しかし、解答できる問題を作成することを目的にすると、自身の知識をより発展的にとらえることができず、この授業のねらいが達成できないと考える。なお、解答できない問題を作成したとしても「なぜ、解答できないのか」についてインターネット等を使って考察することで、対数に関する概念をより深く理解することにつながると考える。

## ３ 授業の実際

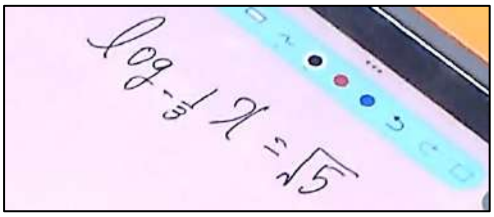


図１ 底に負の数を入れた生徒ａの記述

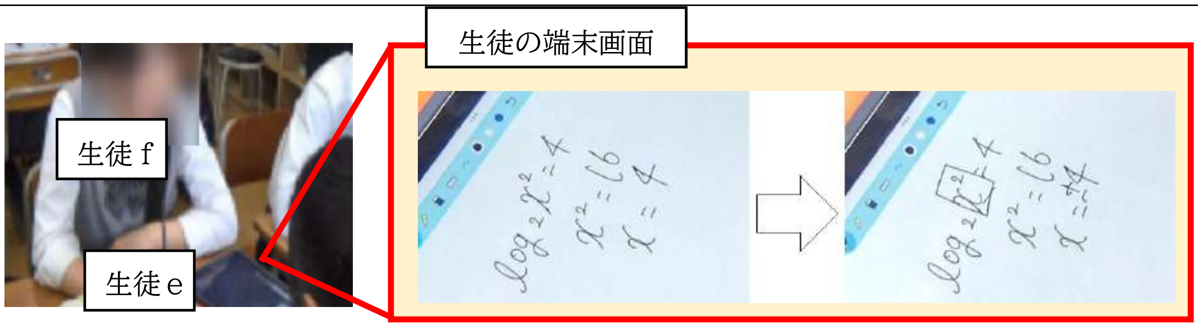
図２ 対数同士の掛け算を調べている生徒ｂの端末画面

授業では、生徒が自身の問いを基に対数を含む方程式・不等式の問題を記述した。生徒ａは「底の数値を負の数にしてみよう（図１）」といった問題を作成した。教科書には底の条件を提示したうえで、学習を進めるような流れとなっているが、この取組により、「そもそも、なぜ底が負の数にすることが除外されているのか」について考察することにつながった様子が見られた。また、「対数同士の足し算、引き算の計算は教科書に記載されているのにも関わらず、掛け算、割り算はなぜないのか」と疑問をもち、自身のタブレット端末で調べる生徒ｂもいた（図２）。さらに、真数を分数にする生徒がいて、その問題を解決しようとする際に、「４分の３乗とはなにを表すのか」といった指数法則の振り返りにつなげている生徒ｃの姿も見られた。生徒ｄは、「真数が２乗になるとどうなのか」といった問いを基に、他者と協議しながら「$\log_2 x^2 = 4$」という問題を作成した。この問題については、授業の終盤に指導者からクラス全体に共有され、この問題の解答はどうなるのかについて発問した。この問題の解答について、多くの生徒が「４」と答える中、生徒ｅと生徒ｆがこの問題について協議しながら解答を導いた様子を図４に示す。この真数に２乗がついた問題は、「真数とは何なのか」など、対数についての理解が深まるものであった。

図３ 真数に２乗つけた生徒の記述

生徒が問題を作成した後、４人１組になって、それぞれで作成した問題を解き合ったり、評価し合ったりした際には、真数条件や底の条件について話している生徒ｇや、グラフを基に指数関

数と対数関数を比較している生徒hの姿が見られた。




生徒e：真数に２乗がついている。
生徒f：真数ってそもそも何だったかな。真数は正ということしか分からない。
生徒e：この問題の真数は「x」なのかな。
生徒f：「x」 ではなく、「$x^2$」で２乗も真数に含まれるよ。
生徒e：では、この問題の解にはマイナスも含まれるのかも。

図４　真数に２乗がついた方程式について協議している生徒の様子

## ４　まとめ

### （１）　成果

生徒からは「先生から提示された問題を解答するような普段の授業と違って、問題を作成することに苦労したが、問題を解く時と違って、（真数や底の）条件を意識することができた」といった声があり、このような数学的活動により、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができた。

### （２）　課題点とその改善案

この授業の課題点は、生徒が対数を含む方程式・不等式の問題を単に複雑に作成したことである。例えば、図５のように底や真数にログを記述している生徒ｉがいた。その生徒になぜそのような問題を作成したか聞いたところ、「なんとなく難しそうだから」と答えた。「真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる」という本時の学習の目標に到達することを意識した問題を作成してもらいたかったが、このように対数に関する本質的な理解が得にくい問題を作成している生徒が一部見られた。この改善案として、指導者が対数を含む方程式・不等式の問題を作成した見本を示したり、授業において、生徒が作成した良問を授業の途中に取り上げたりして、本時の学習の目標を達成できる指針を示すといったことが考えられる。

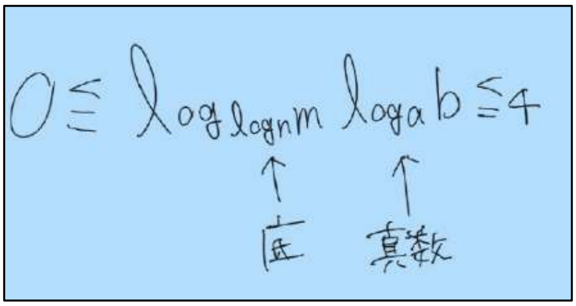



図５　問題を作成した生徒ｉの記述（ロイロノートの画面）

## 【数学Ⅲ「逆関数・合成関数」(数研出版　高等学校数学Ⅲ)における実証授業の指導計画とその授業の実際】

### 1　はじめに

数学Ⅲ「逆関数・合成関数」を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基にA「問題を見いだす」数学的活動を行った。生徒は、この授業までに「逆関数・合成関数」の学習を一通り終えている状態である。この時期に学習する「逆関数・合成関数」においては、教科書等に記載されている単純な関数のみを取り扱っていることや、その後の学習でよく活用され、汎用性の高い内容にもかかわらず、定義や性質について生徒が理解しづらい学習内容である。そこで、値域と定義域の関係性といった合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができたり、これから学習していく未知の関数について対応できたりするよう「今まで学習してきた関数を使って合成関数を求めよ。加えて、その求めた合成関数の逆関数を求めよ」という学習課題を設定し、授業を構想した。

### 2　指導の計画と方法(指導上の工夫)

#### (1)　単元の目標

・簡単な分数関数と無理関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。(知識及び技能)
・合成関数や逆関数の意味を理解し、簡単な場合についてそれらを求めることができる。(知識及び技能)
・分数不等式、無理不等式を解くことができる。(知識及び技能)
・既に学習した関数の性質と関連付けて、簡単な分数関数と無理関数のグラフの特徴を多面的に考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
・自身で種々の逆関数や合成関数を求めることができる。(思考力、判断力、表現力等)
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

#### (2)　評価規準

| 知識・技能<br>知 | 思考・判断・表現<br>思 | 主体的に学習に取り組む態度<br>態 |
|---|---|---|
| ●簡単な分数関数と無理関数の値の変化やグラフの特徴について理解している。<br>●合成関数や逆関数の意味を理解し、簡単な場合についてそれらを求めている。<br>●分数不等式、無理不等式を解いている。 | ●既に学習した関数の性質と関連付けて、簡単な分数関数と無理関数のグラフの特徴を多面的に考察している。<br>●合成関数や逆関数の定義を理解し、自身で種々の逆関数や合成関数を求めている。 | ●事象を関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
|---|---|---|
| 1 | ●分数関数のグラフ | ・分数関数のグラフを描くことができる。<br>・分数関数の定義域・値域を求めることができる。 |
| 2 | ●分数関数のグラフと直線の共有点<br>●分数不等式 | ・共有点を求めることができる。<br>・不等式を解くことができる。 |
| 3 | ●無理関数のグラフ | ・無理関数のグラフを描くことができる。 |
| 4 | ●無理関数のグラフと直線の共有点<br>●無理不等式 | ・共有点を求めることができる。<br>・不等式を解くことができる。 |
| 5 | ●逆関数 | ・逆関数の定義を理解し、様々な関数の逆関数を求めることができる。<br>・逆関数の定義域・値域や性質を求めることができる。 |
| 6 | ●合成関数 | ・合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。 |
| 7 | ●自身で種々の逆関数や合成関数を求める | ・種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。 |

（４） 学習の展開例

第６時に向けての家庭学習

| ◇学習活動 | ・指導上の留意点 |
|---|---|
| ◇第６時に行うジグソー学習に向けて、課題A、課題B、課題Cにおいて、生徒はそれぞれ割り振られた課題に取り組む。 | |
| 課題A：ある２つの関数が合成関数をつくることができる場合、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを理解する。<br>例として、$f(x)=x+1$ $g(x)=\frac{1}{x}$ において、$f(g(x))$、$g(f(x))$はそれぞれつくることができるかどうかを考える。 | |
| 課題B：ある関数に逆関数が存在する場合、その関数と逆関数の合成関数はxになることを理解する。例として、$f(x)=2x+1$、$g(x)=\frac{x-1}{2}$ について、$f(g(x))$、$g(f(x))$ をそれぞれ求める。 | |
| 課題C：ある関数に逆関数が存在する場合、その関数と逆関数のグラフを見て、互いのグラフの位置関係を確認する。例として、$f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2$ を活用して考える。 | |
| ◇課題を解き、ロイロノートの「提出箱」に提出する。 | |

第６時（合成関数）の展開例

◎学習の目標
・合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 15分 | ◇今回の授業の目的と流れについて理解する。<br>●「今回の授業は、合成関数について学びます。ただし、この授業では、３人ずつのグループを作り、３人の力を組み合わせて課題を解決する学習活動を行います。具体的には、授業前半で、課題A、B、Cの同じ課題を行ったグループで集まり、課題についての考えをより深める時間をとります。次に、それぞれの課題A、B、Cについて、異なる知識をもった人たちで再度３人ずつのグループを構成し、３つの知識を統合させて課題を解決していく活動を行います。３人の知識が全て異なるため、それぞれの生徒が必ず発言し、問題解決に向かって進めるようにしましょう」と伝える。 | | |
| | ＜課題１＞それぞれに割り振られた課題についてグループで考察する。 | | |
| 20分 | ＜課題２＞エキスパートA、B、Cで学習した内容をお互いに教えあう。その後、$f(x)=2^x$ 、$g(x)=\log_2 x$ の２つの関数について合成関数を求め、この二つの関数がどのような関係なのか説明する。 | | |
| 15分 | ◇授業のまとめをする。<br>●生徒の記述を基に、合成関数の性質や定義域についての理解、もとの関数と逆関数の位置関係 | | ・もとの関数と逆関数との同値性や関数における一対一対応（円の方程式等）についてふれる。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 等、生徒に発問し、学習のまとめを行う。<br><br>◇次の授業について理解する。 | | ※思<br>合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。 |

準備物
・１人１台端末・大型提示装置

第７時に向けての家庭学習

| ◇学習活動 | ・指導上の留意点 |
|---|---|
| ◇課題をロイロノートの「提出箱」に提出する。 | |
| ＜家庭課題１＞：これまでに学んだ関数をかけ。ただし、三角関数は除く。 | |
| | ・関数の式については、シンプルな形で記述するように伝える。 |
| ＜家庭課題２＞＜家庭課題１＞で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよ。また、その関数を定義域と値域を求めよ。ただし、三角関数は除く。 | |

第７時（自身で種々の逆関数や合成関数を求める）の展開例

◎学習の目標
・種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 10分 | ◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「今回は、今まで学習してきた関数を使って、自分たちで合成関数や逆関数を求めてもらいます。この時間は、単に先生から与えられた問題を解くのではなく、自分たちで問題を設定して、それを解くことを重視しています。この問題を設定してその問題を解く力は、これらの社会で求められている力です。今日はその力を身につ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30分 | けてもらうための授業です。」ことを伝える。 | | |

＜家庭課題１＞＜家庭課題２＞の内容について考察する。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●数学Ⅲで学習した分数関数や無理関数についてふれる。<br><br>◇家庭学習を踏まえて、合成関数と逆関数を求める。 | | ・関数の式については、シンプルな形で記述するように伝える。<br>・ロイロノートの「画面共有」を活用し、生徒がほかの生徒の考えを把握できるようにする |

＜課題３＞いろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよ。
また、その関数を定義域と値域を求めよ。

＜課題４＞求めた合成関数の逆関数を求めよ。
また、そのときの関数の定義域と値域を求めよ。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。 | | |

＜「マスめがね」による提示＞
・関数を組み合わせて合成関数を求める際には、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要がある。
・逆関数を求める際には、もとの関数とその逆関数では、定義域と値域がどのような関係になっているのかな。
・逆関数を求めた際に、もとの関数とのグラフの位置関係はどうなっていたかな。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。 | | |

＜ルーブリック＞

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ求めることができた。 | 合成関数と逆関数を求めることができた。 | 合成関数を求めることができた。 | 合成関数を求めようとした。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ◇できた生徒は、「＜課題３＞、＜課題４＞、『関数ソフトで示した合成関数と逆関数のグラフ』」 | | ・必要に応じて、関数ソフトを使って、求めた合成関数と逆関数の位置関係を確認する。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | についてルーブリックを基に自己評価する。また、これら三つをロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。<br>◇グループを作り、自身で求めた合成関数、逆関数、それらのグラフを共有し、どのようにしてこれらを求めたのか話し合う。 | | ※思<br>種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。 |
| 10分 | ◇授業のまとめをする。<br>◇<振り返り>を記述し、この取組により何を学んだのか記述する。<br>●合成関数と逆関数について、生徒の提出した内容や振り返りの記述を基に、解説する。<br>●「今日は、自分たちで設定した関数を基に合成関数や逆関数を求めてもらいました。普段の授業でも『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問いをもちながら取り組んでください」と伝える。 | ☆一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要性が感じられた。<br>☆どんな関数でも逆関数のグラフとの位置関係は直線$y=x$に関して対称になることがわかった。 | ・教科書に記載されていない合成関数や逆関数の定義域についてふれられている内容や、合成関数と逆関数との位置関係を見る。特に、合成関数を求める際に、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要があること。逆関数を求める際には、定義域と値域が元の関数と逆になっていること。もとの関数と逆関数とのグラフの位置関係が直線$y=x$に関して対称になることについてふれていることについて、おさえる。 |

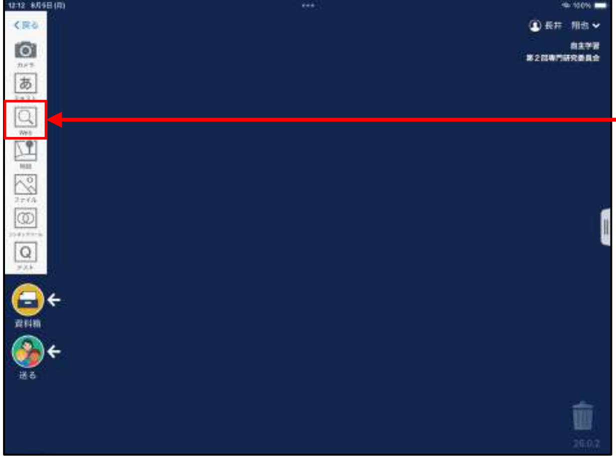
準備物
・１人１台端末・大型提示装置

【改善案】
授業のまとめに「今回除いた三角関数について、逆関数は存在するのか考えよ」という学習課題を生徒に考えさせると、今回の学習内容について確認できる。

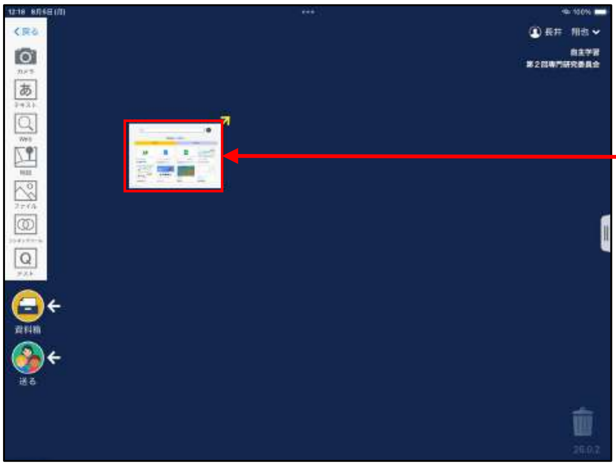
令和６年度　数学科教育に関する研究

# GeoGebra(バージョン31)
# 使用手順

ロイロノートで
関数ソフトを使ってみよう！

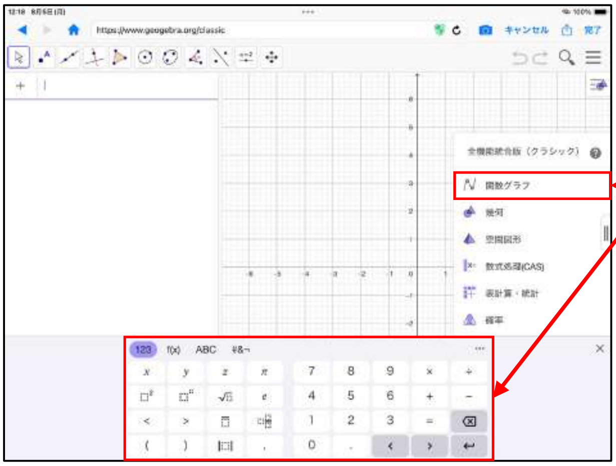



①　「Web」をクリックする

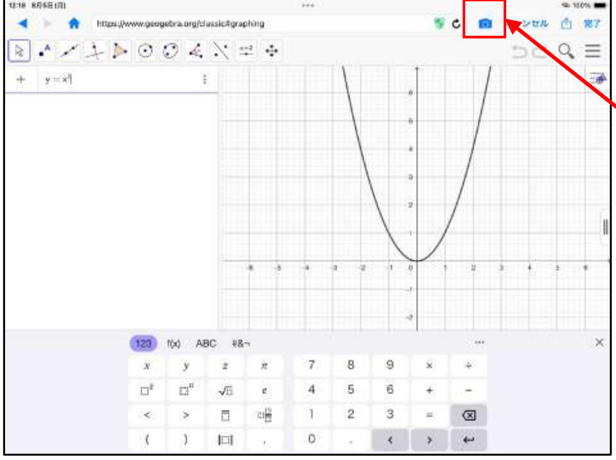



②　出てきたカードをクリックする

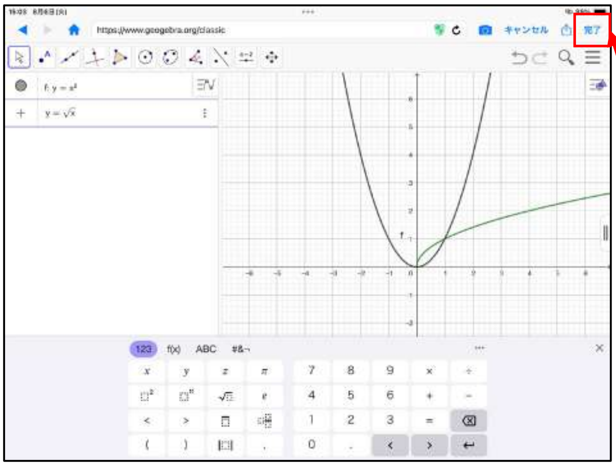
③　「GeoGebra」をクリックする



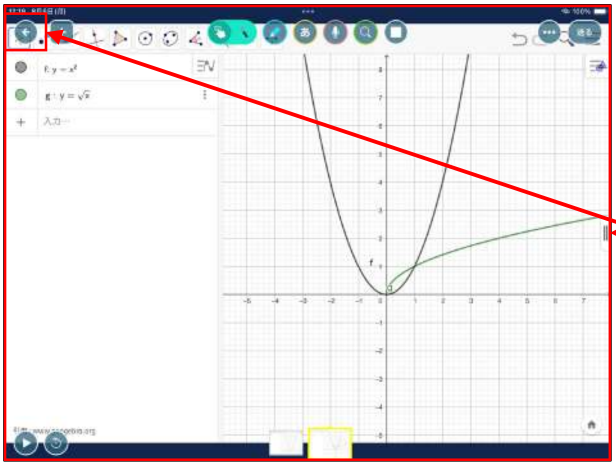

④　「関数グラフ」をクリックし、関数を入力する



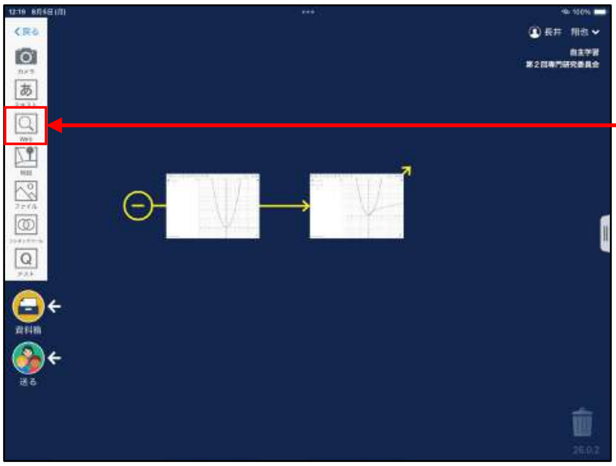
⑤　カメラをクリックすると、その画面のカードが生成される



⑥　「完了」をクリックすると、その画面のカードが生成され、GeoGebraの閲覧が終了する



⑦　⑥の状態のカードの画面になる「←」をクリックする



⑧　引き続き、GeoGebraを活用する際には、①～⑦と同様に行う

# 合成関数と逆関数（合成関数と逆関数の性質について）

＜課題１＞

| 割り振られた課題について理解を深めよう |
|---|
| ・私が割り振られた課題は（　　　　　　　）です。 |

＜課題２＞

| 問題：ほかの割り振られた課題について教えてもらおう。また、自身で学んだこと、教えてもらったことを基に、$f(x)=2^x$、$g(x)=\log_2 x$ の２つの関数について合成関数を求め、この二つの関数がどのような関係なのか記述しよう。 |
|---|
| |

# 合成関数と逆関数（自分で逆関数・合成関数を求めよう）

＜家庭課題１＞

| これまでに学んだ関数をかこう。ただし、三角関数は除く。 | |
|---|---|
| 例　$y = x^2 + 1$ | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

＜家庭課題２＞

| ＜家庭課題１＞で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよう。<br>また、その関数を定義域と値域を求めよう。ただし、三角関数は除く。 | |
|---|---|
| $f(x) =$ | $g(x) =$ |
| $f \circ g(x) =$ | |

# 合成関数と逆関数（自分で逆関数・合成関数を求めよう）

＜課題３＞

| ＜家庭課題１＞で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよう。<br>また、その関数を定義域と値域を求めよう。ただし、三角関数は除く。 | |
|---|---|
| $f(x) =$ | $g(x) =$ |
| $f\circ g(x) =$ | |

＜課題４＞

求めた合成関数の逆関数を求めよう。また、そのときの関数の定義域と値域を求めよう。

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ作成することができた。 | 合成関数と逆関数を作成することができた。 | 合成関数を作成することができた。 | 合成関数を作成しようとした。 |

・私の達成基準は（　　　　　）です。

＜振り返り＞

この取組により、逆関数と合成関数についてどのようなことを学びましたか。

### （５） 指導上の工夫について（第６時、第７時）

第７時で実施する「既習の学習内容を基に『問題を見いだす』数学的活動」を充実させるためには、既習の学習内容の定着が必要である。そこで、第６時において、「ジグソー学習」を取り入れて、逆関数・合成関数についての理解を深める機会を設定する。この「ジグソー学習」では、各生徒が保有する知識がエキスパートＡ、Ｂ、Ｃの内容に分かれているため、エキスパートＡ、Ｂ、Ｃを担当する生徒がそれぞれグループになった際に、各生徒が「質問に答えられるのは自分だけ」という責任感を持つことにつながる。さらに、グループ作成後の学習課題については、グループ内で各エキスパートの知識が必要になるよう作成したことから、それぞれのエキスパートで得た知識を結びつけることにもつながり、逆関数・合成関数の理解を深めることができると考える。この学習で得た知識を基に第７時をより充実させるようにする。

第７時における指導上の工夫としては２点ある。１点目は、逆関数・合成関数を求める際に、これまでに学んだ関数をかくことを家庭学習に取り入れたことである。組み合わせる基となる関数を記述する段階を家庭学習で踏まえることにより、生徒がどのように逆関数・合成関数を求めればよいのかスムーズに数学的活動が行えると考える。また、逆関数・合成関数を求める際に組み合わせる関数については、シンプルな関数を選択することを意識させることを生徒に伝えている。単に複雑な関数を組み合わせようとすると、定義域や値域を把握したり、逆関数にすることが困難になったりするため、本授業の目標である、合成関数や逆関数の定義や性質を理解するという部分に到達しづらい。そのため、本授業では組み合わせる関数についてはシンプルな関数にするよう伝える。２点目は、逆関数・合成関数を求める際に、関数ソフトGeoGebra（以下、GeoGebraという。）を活用する点である。GeoGebraとは、幾何学、代数学、表計算、グラフ作成、統計学、微積分を一つにまとめた、無料で利用できる教育用の動的な数学ソフトウェアである。この関数ソフトはロイロノートの「Web」機能からスムーズに活用できるため、本授業を進めるうえで非常に使いやすい。このソフトを活用することで、生徒が合成関数から逆関数を求める際に、立式や定義域、値域が正しいのか把握したり、合成関数とその逆関数のグラフの位置関係を理解したりすることの一助となる。また、生徒の考えをクラス全体に共有する際にも、グラフという視覚的な要素により、合成関数と逆関数の関係を視覚的に理解することができる。

## ３ 授業の実際（第６時、第７時）

第６時において、授業の冒頭に生徒は、「逆関数・合成関数」に関する三つの学習課題Ａ、Ｂ、Ｃのうち一つが割り振られ、その割り振られた学習課題が同じグループを作り、その学習課題について理解を深める学習活動を行った。その後、学習課題Ａ、Ｂ、Ｃにおいて、割り振られた学習課題がそれぞれ異なるグループを作り、それぞれの知識を活用して解答できるように共通の学習課題に取り組んだ。この場面では、ロイロノートを使って自身の記述内容を基に伝えたり、GeoGebraを使ってもとの関数と逆関数の関係を表現したりして、逆関数と合成関数について数学的な表現をする生徒の姿が見られた

図１　１人１台端末を活用して、自身の記述内容を表現している生徒の様子

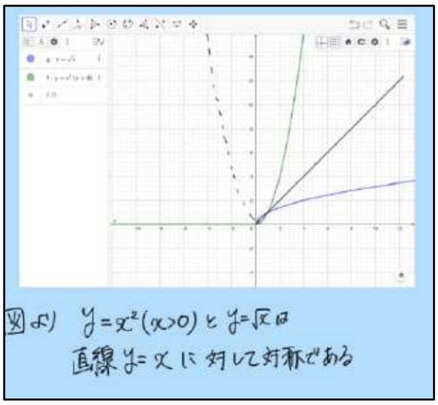



図２　GeoGebra を使って、もとの関数と逆関数の関係を表現している生徒ａの記述

（図１）（図２）。本時の授業により、生徒は逆関数・合成関数の定義や性質について理解を深めることにつながった。

第７時において、生徒は、前時の学習課題の解決過程を振り返る際に「どのような関数においても合成関数や逆関数を求めることができるのか」という問いから「今まで学習してきた関数を使って合成関数を求めよ。加えて、その求めた合成関数の逆関数を求めよ」という学習課題に取り組んだ。生徒は、自身で設定した関数を基に合成関数を求め、そして、その逆関数を求めた。ここでは、前時に学習した逆関数・合成関数の定義や性質を活用したり、関数ソフトを活用してグラフで表現したりして、未知の関数について立式や定義域、値域が正しいのか考察した。例えば、図３のような生徒ｄの記述が見られた。この生徒が組み合わせた関数については、定義域や値域について深く考察するもので、合成関数や逆関数について理解を深めるものであった。また、組み合わせる前の式はシンプルな関数であるが、合成関数や逆関数にすると、生徒が今まで見たこともない関数が作成されている。このような関数について、生徒自身でその立式が正しいのかについて、指導者が確認するのではなく、関数ソフトを使って、その解決過程が正しいのかを確認した。生徒ｃは合成関数とその求めた逆関数を掛けると、ｘ になるという性質を基に、自身の解答が正しいか確認していた。また、生徒ｄは生徒同士で自身の求めた関数について協議する際に「逆関数を求めた際、もとの関数とのグラフの位置関係はどうなっていたかな」と示された「マスめがね」を基にして、「あなたのグラフは合成関数とその合成関数の逆関数の位置関係が直線 ｙ＝$x$ に関して対称になっていないからどこかの過程が違うのではないか」というアドバイスを他者にしていた（図４）。さらに、生徒ｅは、自身の学習課題が終わった後も、その解決過程を自身で振り返ることで、「底の数値を変更するとその合成関数や逆関数のグラフはどのように変化するのかな」といった自身で設定した関数に

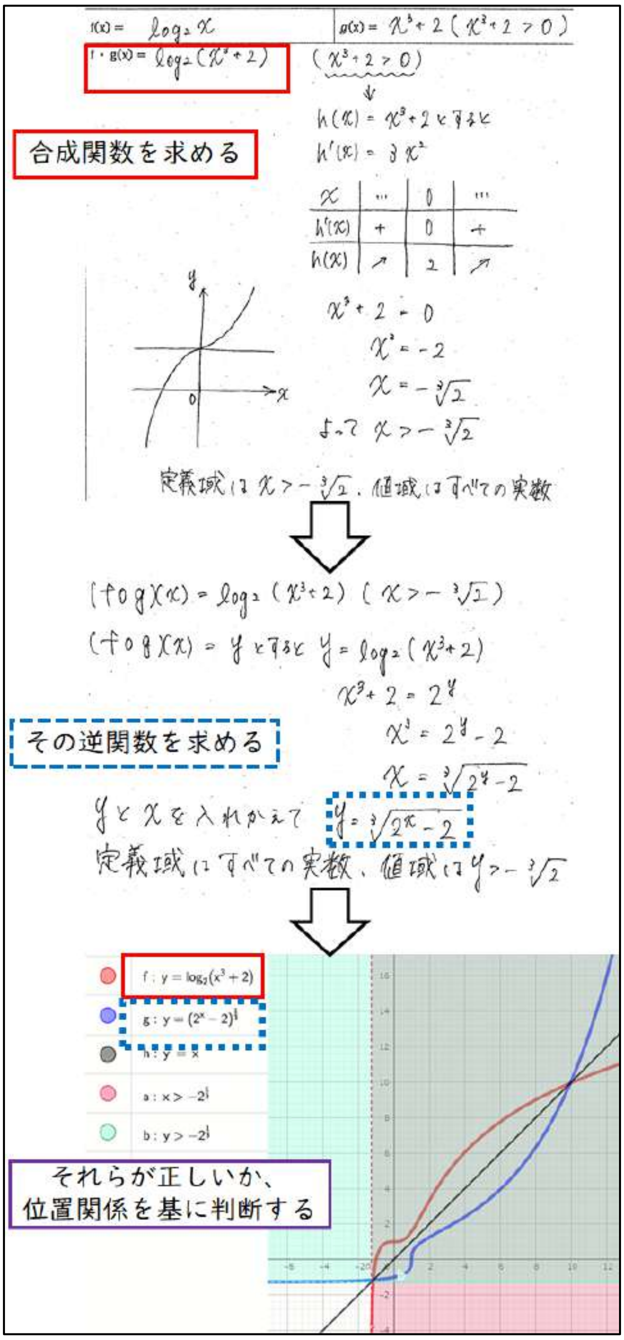


図３　自身で合成関数と逆関数を求め、それらを関数ソフトで表現した生徒ｂの記述

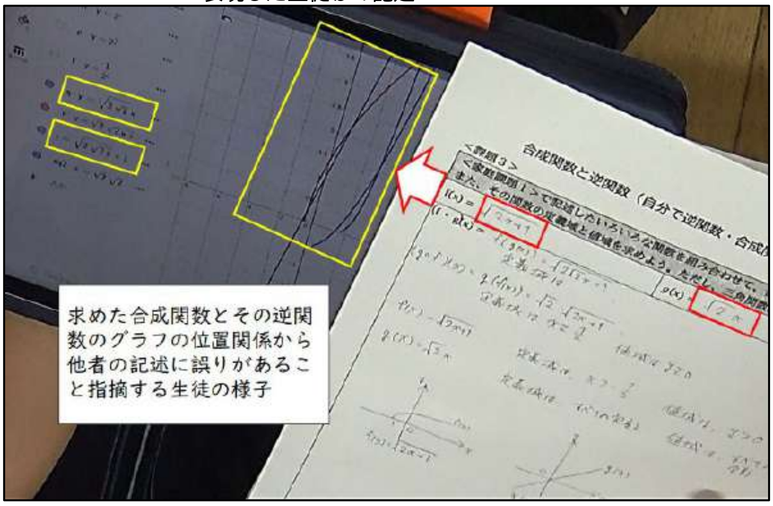


図４　グラフの位置関係を基に他者に誤りがあることを指摘する生徒ｄの様子

ついて発展的に考察していた（図５）。多くの生徒がこの数学的活動により、立式や定義域、値域が正しいのか考察したり、合成関数とその逆関数のグラフの位置関係について注目したりすることで、合成関数や逆関数の定義や性質を理解することにつながった。

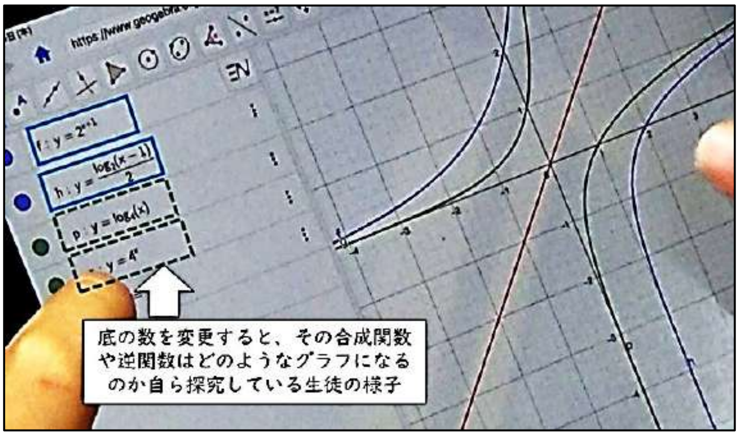



図５　自身で関数の数値を変更して、発展的に考察する生徒ｅの様子

## ４　まとめ

### （１）　成果

　このような数学的活動により、組み合わせる関数を生徒自身で設定することから始まり、合成関数と逆関数を求めた後にそれらが本当に正しいのか、自身のもっている概念、原理や法則を活用して解決過程を振り返るという「問題発見・解決の過程」全体を自立的、協働的に遂行することで、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることにつながったと考えられる

### （２）　課題点とその改善案

　第７時の授業において、生徒それぞれで取り組んだ学習課題が違うことから、どのようにして授業をまとめるのかについて更に工夫する必要がある。改善案としては、生徒が今回の授業で得られた知識を確認する共通問題を用意すると、この授業で目指す学習の目標が達成できたか確認できると考えられる。例えば、「今回除いた三角関数について、逆関数は存在するのか考えよ」という学習課題を提示し、生徒に考えさせると、グラフの位置関係や定義域、値域の関係といった生徒が得た学習内容について評価できるのではないかと考える。

参考ＨＰ

東京大学ＣｏＲＥＦ「知識構成型ジグソー法」
http://coref.u-tokyo.ac.jp/
中村 憲昭「ジグソー法の数学科の授業内における位置付け」
https://www.saitama-u.ac.jp/edu/grad/master/report/pdf/h-30/012.pdf

## 【数学Ⅰ「二次関数の最大値、最小値」(数研出版　新編数学Ⅰ)における実証授業の指導計画とその授業の実際】

### 1　はじめに

数学Ⅰ「二次関数の最大値・最小値」(数研出版　新編数学Ⅰ)を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対してB「見通しを立てる」数学的活動を行う。生徒は、この授業までに「平方完成をして二次関数のグラフをかく」ところまで学習している。二次関数の最大値・最小値について未習の状態である生徒は、本時の授業において既習の学習内容を活用して「針金を使って、長方形を作り、面積が最大のときと最小のときは横の長さが何㎝のときか」という学習課題に取り組む。この学習課題を設定した理由として、日常生活や社会の事象に関わる題材と通じて、二次関数のグラフをかく有用性をより伝えることができたり、二次関数の最大値・最小値の解法を自身で見いだしたいと思えたりできると考えたためである。

### 2　指導の計画と方法(指導上の工夫)

#### (1)　単元の目標

・二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解できる。(知識及び技能)
・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。(知識及び技能)
・二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解することができる。(知識及び技能)
・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。(知識及び技能)
・二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

#### (2)　評価規準

| 知識・技能<br>知 | 思考・判断・表現<br>思 | 主体的に学習に取り組む態度<br>態 |
|---|---|---|
| ●二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解し、二次関数の最大値や最小値を求めている。<br>●二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解している。<br>●二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めている。 | ●二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 | ●事象を二次関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
| --- | --- | --- |
| 1<br>~<br>2 | ●関数の値・一次関数 | ・関数について理解し、関数の値を求めることができる。<br>・傾きと切片に着目して、一次関数のグラフを書くことができる。 |
| 3<br>~<br>9 | ●二次関数のグラフ | ・二次関数の式の変化をグラフの平行移動とみて考察することができる。<br>・二次関数の軸と頂点を求め、グラフを書くことができる。<br>・二次関数の値の変化をグラフから考察することができる。 |
| 10<br>~<br>12 | ●二次関数の最大値、最小値<br>（本時：第１０時） | ・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。<br>・日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値･最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。 |
| 13<br>~ | ●二次関数の決定 | ・与えられた条件から二次関数の式を求めることができる。<br>・二次関数を決定する条件を自身で見いだすことができる。 |
| 16<br>~<br>17 | ●二次方程式の解、二次関数のグラフとx軸との共有点 | ・二次関数のグラフとx軸との共有点のx座標を求めることができる。<br>・二次関数のグラフとx軸との共有点の個数や位置関係を二次関数と関連させて考察することができる。 |
| 18<br>~<br>21 | ●二次関数のグラフと二次不等式、二次不等式の解 | ・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。 |

（４） 学習の展開例

第１０時に向けての家庭学習

| ◇学習活動 | ・指導上の留意点 |
| --- | --- |
| ◇前時までに学習した二次関数のグラフの問題を解き、ロイロノートの「提出箱」に提出する。 | |

＜ロイロノートによる課題の提示＞

次の二次関数のグラフをかけ。

(１) $y = x^2 - 4x + 3$

(２) $y = -2x^2 - 4x + 1$

第１０時（二次関数の最大値、最小値）の展開例

◎学習の目標
・日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 15分 | ◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「今回の授業は、皆さんがまだ学習したことのない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるようになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょうか。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。<br><br>◇事前に提出した学習課題について、理解する。 | | |
| | ＜課題１＞二次関数のグラフはどのようにしてかくのか。 | | |
| 25分 | ◇事前に提出した課題について、何が正しいか考察する。<br><br>◇生徒に未習の学習内容である学習課題を知る。 | | ・生徒の正答例と誤答例を提示し、何が正しいのか考察できるようにする。 |
| | ＜課題２＞１６cmの針金を使って、長方形を作り、面積が最大のときと、最小のときになるのは、横の長さが何cmだろうか。また、そのときの面積はどうなるだろうか。 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ◇４人１組の班を作り、実際にモールを使って、予想する。 | | |
| | ●生徒の予想を聞く。 | ☆正方形のとき、最大値になりそう。<br>☆横の長さが１㎝のとき、最小値になりそう。 | |
| | ●そもそも、長方形ってどんな形だろうか。 | ☆横長、縦長の長方形？<br>☆正方形？<br>☆４つの角が等しい四角形 | |
| | ●４つの角が等しい四角形である長方形にはどんな性質がありますか。 | ☆向かい合う辺は等しい。 | |
| | ●長方形の辺が０や負の数になることはあるのかな。 | ☆ない。 | |
| | ●では、範囲を指定する必要がありますね。範囲を指定しながら、自分たちの予想が正しいか、数学的に解決しよう。 | | |
| | ◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入ってある「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。 | | ・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。 |

＜「マスめがね」による提示＞
・長方形の面積はどのようにしたら求められるのかな。
・縦の長さと横の長さをxを使って表せないかな。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。 | | ・ルーブリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。 |

＜ルーブリック＞

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。さらに、面積が最小となるときについても考察することができた。 | 面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。 | 面積が最大のときの横の長さを求められた。 | 面積が最大のときになる横の長さを求めようとした。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●できた生徒については、自身の解答をルーブリックを基に自己評価し、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出させる。 | | ・できた生徒に対しても、定義域について記述していない生徒がいれば、他者と協議が行えるように働きかける。<br>・「立式」、「二次関数のグラフ」といった生徒が解答につながる発言や記述を取り上げ、生徒の発言を基に全体に共有する。<br><br>※思<br>　日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。 |
| 10分 | ◇本時の学習内容をまとめる。<br>●どのように立式しましたか。<br>●どのようにして面積の最大値を求めましたか。<br>●面積の最小値についてはどんな考察をしましたか。<br><br>●「今回の授業は、自分の力で関数の最大値、最小値の問題を解きました。これはすごいことです。君たちは関数のグラフをどのように活用するのかを見いだしたり、グラフの有用性を発見したりすることができました。この力は、今後の数学の世界を広げる際に役に立ちますし、社会でも自分の力で未知の問題を解決する力が求められています。今日はこんな力を身につけるための授業を行いました」と伝える。 | | ・ロイロノートを活用して、生徒の記述内容を基に、生徒に解説させる。<br><br>・モールや二次関数のグラフを使って、最小値がないことを生徒に示す。 |

準備物
・１人１台端末・大型提示装置

# 二次関数（面積が最大のときと最小のときを求めよう）

＜課題１＞

次の二次関数のグラフをかけ。

（１）$y=x^2-4x+3$

（２）$y=-2x^2-4x+1$

（１）

（２）

＜課題２＞

問題：１６cmの針金を使って、長方形を作り、面積が最大のときと、最小のときになるのは、横の長さが何cmだろうか。また、そのときの面積はどうなるだろうか。

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。さらに、面積が最小となるときについても考察することができた。 | 面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。 | 面積が最大のときになる横の長さを求められた。 | 面積が最大のときになる横の長さを求めようとした。 |

・私の達成基準は（　　　　　　）です。

（５） 指導上の工夫について(第１０時)

本授業の指導の工夫として、２点ある。１点目は、未習の学習内容に対して「見通しを立てる」数学的活動を充実させるために、日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、二次関数の最大値・最小値の学習課題を提示したことである。単に「数式から二次関数の最大値・最小値を求めよ」といった学習課題を生徒に提示しても、生徒はその学習課題に対して、「解決したい」と思える必要性を感じず、試行錯誤しながら見通しを立てようとする意欲が湧きにくいと考えられる。そこで、実際に針金(モール)を使って、生徒に「長方形の面積が最大になるのは横の長さが何㎝だろうか」と実物を基に予想させることで、「自分の予想が正しいのか確認したい」と思えるような仕掛けをする。２点目は、今回の学習課題に対して、最小値を考察させた点である。教科書等に記載されている日常生活や社会の事象に関わる問題では、最大値もしくは最小値のいずれかしか解答しない。なぜなら、そのような問題においては定義域の両端の値が含まれないことが多いためである。今回の学習課題においては、最小値について問いかけることで、定義域の両端の値が含まれない場合、最小値はどのような解が得られるのかということを考察し、生徒が自身でそれを見いだすことで、この単元における最大値・最小値についての理解だけでなく、数学の学習全般に通用する「開区間」「閉区間」の概念を獲得することにつながると考える。

３ 授業の実際(第１０時)

生徒は授業の冒頭で、「長方形の面積が最大になるとき、横の長さは何㎝のときか」という学習課題について、モールを使って予想した。生徒は、実際にモールを使って予想する際に、「横の長さと縦の長さを足して２をかけると長方形の周の長さになる」や「横をどんどん長くすると、面積はどのようになるのかな」といった数学的な表現や定義域についての考えなどを協議していた(図１)。また、「正方形は長方形ではないよね」という協議が行う生徒の姿も見られた。自身の予想をクラス全体に共有する際に、正方形のとき面積が最大となるという生徒の予想がでたときは、別の生徒から「横の長さが４㎝にすると長方形ではなくなる」という声があった。これにより、生徒はそもそも長方形とはどのような図形なのか、自身の既習の学習内容を振り返ることにつながった(図２)。ここで、指導者が長方形とはどのような図形なのかを生徒に振り返らせることで、生徒は正方形が長方形の一部であることを理解することにつながった。その後、この学習課題を解決しようと、生徒は定義域を定めたり、具体的な数値を使って予想したりして、試行錯誤しながら見通しを立てようとしていた。生徒ａは、学習課題に対して立式し、その式が二次関数であることから、これまでの学習内容に倣い、グラフをかいた。この生徒は、このグラフがどのような意味をもつのか理解していなかったが、生徒同士の協議を進めることで、横の長さによって、面積が変化するという横の長さと面積の関係を表すグラフであることを自身で見いだすことにつなげた。また、生徒ｂは一次不等式で学習した不等式を表す数直線を基に、まだ学習していない定義域の両端の値が含まれない

図１ モールを使って、学習課題について予想をする生徒の様子

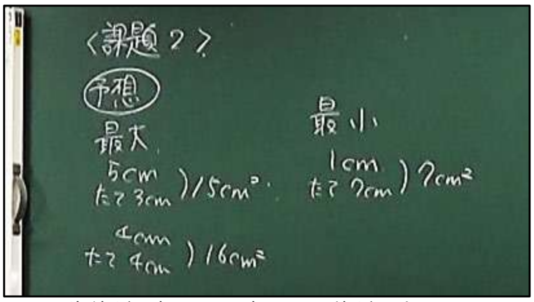


図２ 生徒が予想した長方形の面積が最大となるときの横の長さを示した板書

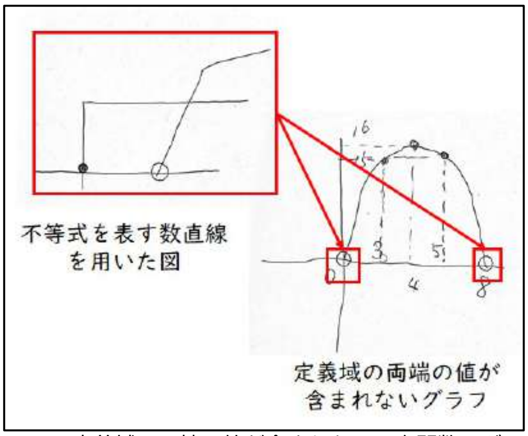


図３ 定義域の両端の値が含まれない二次関数のグラフを見いだした生徒ｂの記述(囲み線、コメントは筆者)

二次関数のグラフを記述し、最小値がないことを自身で見いだした(図３)。さらに、最小値について、「0.00000…1のように０にどんどん近づくが、最小の値を定めることはできないため、最小値はない」と答えた生徒ｃもいて、今までの学習では学んでいなかった「最小値がない」という新しい概念を自分なりの言葉で表現している様子が見られた(図４)。

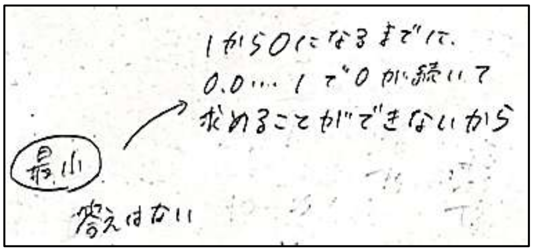


図４　最小値はないと解答した生徒ｃの記述

## ４　まとめ

### （１）　成果

この数学的活動に取り組んだことにより、グラフの有用性に気付いたり、既習の学習内容と関連付けて、自身で新しい概念を獲得しようとしたりすることができ、生徒が自身で試行錯誤しながら学習課題に対して見通しを立てようと主体的に学習に取り組むことにつながった。生徒からは「もうこんな時間だ！」といった声があり、集中して授業に向き合うことができた。また、授業後にも本授業について協議している生徒の姿が見られたことから、未習の学習内容に対して試行錯誤しながら見通しを立てる数学的活動の充実につながったと考えられる。

### （２）　課題点とその改善案

課題点は、本授業が１単位時間で終えることが困難であった点である。本授業で大切にしたかった「グラフの有用性を感じる」ということについて、本来多くの時間を取りたかったのだが、本授業では、定義域を定めることや横の長さと縦の長さについて立式することに時間がかかったため、そこに時間がさけなかった生徒が一部いた。１単位時間で完結させるのならば、生徒の実態に応じて、指導者が伝えるところと、生徒に考察するところを丁寧に計画する必要がある。もしくは、２単位時間で設定し、生徒に考察する時間を多くとり、生徒自身で新しい概念を獲得する時間を設けることが挙げられる。

## 【数学Ⅱ「三次関数の最大値・最小値」（数研出版　高等学校数学Ⅱ）における実証授業の指導計画とその授業の実際】

### １　はじめに

数学Ⅱ「三次関数の最大値・最小値」（数研出版　高等学校数学Ⅱ）を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対してB「見通しを立てる」数学的活動を行った。この授業では、極値や増減表等について学習していない生徒が「$y = x^3 - 3x$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$の最大値・最小値を求めよ」という学習課題に取り組んだ。この学習課題を設定した理由として、生徒にとって本質的な理解がしづらい導関数と微分係数を自身で意味を見いだしたり活用したりすることで、それらの本質的な理解を得たり、活用するよさを感じたりすることができると考えたためである。また、今後学習する極値や増減表といった学習内容に取り組む際にも、それらが導関数と微分係数の概念とつながっていることを実感できると考えたためである。

### ２　指導の計画と方法（指導上の工夫）

#### （１）　単元の目標

・微分係数や導関数の意味について理解し、関数の定数倍、和及び差の導関数を求めることができる。（知識及び技能）
・導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかく方法について理解することができる。（知識及び技能）
・関数とその導関数との関係について考察することができる。（思考力、判断力、表現力等）
・関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。（思考力、判断力、表現力等）
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。（学びに向かう力、人間性等）

#### （２）　評価規準

| 知識・技能<br>知 | 思考・判断・表現<br>思 | 主体的に学習に取り組む態度<br>態 |
|---|---|---|
| ●微分係数や導関数の意味について理解し、関数の定数倍、和及び差の導関数を求めている。<br>●導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかく方法について理解している。 | ●関数とその導関数との関係について考察している。<br>●関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 | ●事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画（枠内が本研究で扱った学習内容である）

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
|---|---|---|
| 1 | ●平均変化率と微分係数の定義 | ・平均変化率、微分係数についての定義を理解したり、解を求めたりすることができる。 |
| 2 | ●導関数 | ・微分係数の図形的な意味を考察し、導関数を求めることができる。 |
| 3 | ●種々の導関数の計算 | ・導関数を表す種々の記号を理解させ、適切に扱うことができる。 |
| 4 | ●関数の最大値と最小値（１） | ・未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。 |
| 5 | ●関数の最大値と最小値（２） | ・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を得ることができる。<br>・他者との協議や関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。 |
| 6 | ●接線の方程式 | ・微分係数が接線の傾きを表すことを理解することで、曲線の接線の方程式を求めることができる。 |
| 7 | ●増減表 | ・導関数を利用して、関数の増減を求めたり、導関数の符号が、グラフの増減を表していることを理解したりすることができる。 |
| 8 | ●極値とグラフ | ・曲線の接線の傾きと関連して、関数の増加・減少と導関数の値の正負との関係を明らかにし、極大・極小値を調べて関数のグラフをかくことができる。 |
| 9 | ●極値のない３次関数のグラフ<br>●３次関数の決定 | ・$f'=0$は、極値をもつための必要条件であるが、十分条件ではないことに気付くことができる。<br>・極値をもつ条件から３次関数を決定することができる。 |
| 10 | ●関数の最大値と最小値（３） | ・増減表を定義域の範囲で記述したり、グラフをかいたりすることで、極値は局所的なもので、最大・最少は大域的なものであることを理解できる。 |
| 11 | ●３次方程式の実数解の個数 | ・方程式の解の個数とグラフとｘ軸の共有点の個数とが一致することを理解できる。 |
| 12 | ●不等式の証明 | ・条件の範囲で、増減表を用いて、最小値＞０を示すことで、不等式の証明ができる。 |

（４） 学習の展開例

第４時に向けての家庭学習

| ◇学習活動 | ・指導上の留意点 |
|---|---|
| ◇前時までに学習した「微分係数」と「導関数」について、定義や性質に記述し、ロイロノートの「提出箱」に提出する。 | |

＜ロイロノートによる課題の提示＞

微分係数とは何か記述せよ。
また、微分係数を求めることで何が得られるのか答えよ。

導関数とは何か記述せよ。
また、導関数を求めることで何が得られるのか答えよ。

第４時（関数の最大値と最小値（１））の展開例

◎学習の目標
・未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 10分 | ◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「今回の授業は、君たちがまだ学習したことのない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるようになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょうか。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解 | | |

決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。

＜課題１＞微分係数、導関数とは何か考察せよ。

◇事前に提出した学習課題について、考察する。
●事前に提出してもらった課題について、生徒の正答例と誤答例を提示し、生徒に考察させる。

☆微分係数とは、グラフのある点に対して接線の傾きを示すのか。
☆導関数は、微分係数を一般的にした新しい関数なのか。

35分

◇生徒に未習の学習内容である例題を解答する

＜課題２＞次の関数の最大値・最小値を求めよ。

$y = x^3 - 3x \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

・課題にクラス全員が積極的に取り組めるように教室内の立ち歩きを可とする。

◇生徒は、ロイロノートの「マスめがね」を使って、数学的な見方・考え方を働かせるようにする。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるようロイロノートを通じて、「マスめがね」を生徒に提示する。

＜「マスめがね」による提示＞
・２次関数の最大値・最小値を求めるためには、なにが必要だったのか。
・２次関数が「減少する」ときと、「増加する」ときでグラフの違いはなにがある。
・２次関数が「大きく減少する」ときと「小さく減少する」ときでグラフの違いはなにがある。

◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。

・ルーブリックを活用して、問題を解答する際の達成基準を示す。

＜ルーブリック＞

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 最大値・最小値を求める過程で定理や性質を使って解き、そしてその定理や性質を使った根拠を示した。 | 最大値・最小値を求める過程で、定理や性質を使って解いた。 | 最大値・最小値を求める過程で、どの定理や性質を使うか理解しようとした。 | 最大値・最小値を求めようとした。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●机間巡視しながら、生徒の記述や考察の様子を確認し、「微分係数」についての記述が出てきた際、全体に共有する。<br><br>◇できた生徒は、ロイロノートの「提出物」に解答を提出する。 | ☆２次関数の最大値、最小値では、定義域の端点だけでなく、頂点も候補になった。<br>☆減少するときは、右下がりで、増加するときは、右上がりになる。<br>☆関数が大きく減少するときと小さく減少するときでグラフの曲線に対する接線の傾きが異なる。 | ・共有する際には、生徒に一度手を止めるよう伝え、注目させる。<br><br>【改善案①】<br>共有について、頻繁に行ったり問題の解決に直結するような発問をしたりすると生徒の活動が受動的になる恐れがあるため、生徒の実態に応じて調整する必要がある。 |

<生徒の解答の例>

$y=x^3-3x\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

$y'=3x^2-3$

$y'=3x^2-3>0$ のとき、その関数は増加する

$y'=3x^2-3<0$ のとき、その関数は減少する

$y'=3x^2-3=0$ のとき、その関数は一定である

これにより、$y'$ の正負にしたがって、グラフをかくとグラフの概形がかける

グラフの概形をかくためには、グラフに対する接線の傾きを求める必要がある。なぜなら、関数が減少（増加）するとき、グラフに対する接線の傾きは負（正）の数になるということがわかるためである。

グラフに対する接線の傾きを求めるためには、微分係数を求める必要があり、微分係数を求めるためには、導関数を求める必要がある。

| | | | |
|---|---|---|---|
| ３分 | ◇次回の授業について把握する。<br>●次回の授業では、ルーブリックを活用して、相互評価をする。また、類題を解いて、その考え方がほかの問題でも活用できるのか理解する。 | | ・できた生徒に対しても、導関数や微分係数の意味について記述していない生徒がいれば、他者と協議が行えるように働きかける。<br><br>※思<br>未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。 |

準備物

・１人１台端末・大型提示装置

第５時（関数の最大値と最小値（２））の展開例

◎学習の目標
・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を得ることができる。（主体的に学習に取り組む態度）
・関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 10分 | ◇ルーブリックを基に、前回の授業で記述した解答を相互評価する。 | | |
| | ＜課題１＞各自で記述した解答をグループ内で相互評価しよう。 | | |
| | ◇４人グループで活動を行う。１人１分×４回<br>◇発表を聞いた３人は、ルーブリックを基にした評価を理由とともに発表者に伝え、ロイロノートの「送る」機能を活用して、発表者に相互評価シートを提出する。 | | ・解答できなかった生徒は、どのように解くのか聞く。<br>・ルーブリックと照らし合わせて改善点などを発表者に伝える。<br>・評価の根拠を具体的な理由とともに述べるように指示する。<br>※態<br>生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を得ることができる。 |
| 5分 | ●指導者は、生徒の記述を基に、「微分係数」と「導関数」をどのように活用して、三次関数の最大値・最小値を求めたのか、生徒に発問する。 | | |
| 20分 | ◇関連する類題を解く。 | | 【改善案②】<br>＜課題２＞（２）については、極値のない問題であることから、生徒の実態に応じて、前時の微分係数と導関数の性質について振り返りながら進める必要がある。 |
| | ＜課題２＞以下の関数の最大値・最小値を求めよ。<br>（１）$y = x^3 - 3x^2 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$<br>（２）$y = x^3 + 2x \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12<br>分<br><br>３<br>分 | ◇できた生徒は、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。<br><br>◇提出した生徒は発表する。<br><br>◇授業のまとめを把握する。<br>●「今回の授業は、君たちがまだ見たことのない未知の問題を解決する学習活動を行いました。この力は大学入試にもかかわってきます。そして、社会においても必要な力です。今回の授業では、その未知の問題にアプローチする体験をしてもらいました」と伝える。 | ☆先ほどと同じように問題が解けるかな。<br>☆(１)は解けるけれども、(２)は解けない。<br>☆もう一度、微分係数の意味やグラフの接線の傾きについて、理解する必要がある。 | ※思<br>関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。<br><br>・ロイロノートの提出物を「画面共有」機能を活用して、クラス全体に共有し、生徒の発言をその提出物に指導者が記述しながら、＜課題２＞のまとめを行う。 |

準備物
・１人１台端末・大型提示装置

**相互評価シート**

（　　　　　　　　　　　　）さんの解答を評価しよう

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 最大値・最小値を求める過程で定理や性質を使って解き、そしてその定理や性質を使った根拠を示した。 | 最大値・最小値を求める過程で、定理や性質を使って解いた。 | 最大値・最小値を求める過程で、どの定理や性質を使うか理解しようとした。 | 最大値・最小値を求めようとした。 |

| 感想<br>・<br>アドバイス | |
|---|---|

（　　）年　（　　）組　（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　）

# 微分法（未習の学習内容について既習の知識を活用して解こう）

＜課題１＞

| 微分係数とは何か記述せよ。 |
|---|
| |

| 導関数とは何か記述せよ。 |
|---|
| |

＜課題２＞

問題：次の関数の最大値・最小値を求めよ。

$y = x^3 - 3x \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 最大値・最小値を求める過程で定理や性質を使って解き、そしてその定理や性質を使った根拠を示した。 | 最大値・最小値を求める過程で、定理や性質を使って解いた。 | 最大値・最小値を求める過程で、どの定理や性質を使うか理解しようとした。 | 最大値・最小値を求めようとした。 |

・私の達成基準は（　　　　　　）です。

＜課題３＞以下の関数の最大値・最小値を求めよ。

| 問題（１）$y = x^3 - 3x^2 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$ |
| --- |
| |

| 問題（２）$y = x^3 + 2x \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$ |
| --- |
| |

### （５） 指導上の工夫について（第４時、第５時）

本授業の指導の工夫として、３点ある。１点目は増減表や極値を学習せずに、三次関数の最大値・最小値の学習課題に取り組んだ点である。「$y = x^3 - 3x$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$の最大値・最小値を求めよ」という学習課題については、教科書の流れに沿って授業を行うと、「増減表を使って、グラフをかけば最大値・最小値が求められる」というこの問題の解法を学ぶことになる。一方で、本研究で行った授業では、生徒が導関数と微分係数までしか学習していないことから、「グラフが増加するときとはどのような状態なのか」や「微分係数と導関数とはそもそもどのようなものなのか」という本質的なことを考え、三次関数の最大値・最小値の解法等を自身で見いだすことをねらいとする。２点目は、導関数・微分係数の定義や性質についての家庭学習を設定したことである。本時の学習課題に取り組むことができるようにするためには、「そもそも導関数・微分係数とは何なのか」や、「これらを活用するとどのような有用性が得られるのか」について把握することが大切であると考える。３点目は、授業における生徒の記述や発言をクラス全体に共有する場面を設定したことである。本時に提示する学習課題について、生徒によってはなかなか解決するための見通しが立てられない生徒もいると予想されると考える。そこで、例えば「微分係数を使うと、グラフの接線の傾きが分かる」ことや、「グラフの増減を把握するためには、接線の傾きの正負を判断することが必要だ」など、生徒の記述や発言を全体に共有する場面を設定することで、見通しを立てられない生徒も安心して数学的活動に取り組むことができると考える。

## ３ 授業の実際（第４時、第５時）

生徒は「三次関数の最大値・最小値」について、今まで学習した二次関数の知識で解けないか式を変形したり、適当な数値を代入して、最大値・最小値を求めようとしたりと試行錯誤しながら取り組んだ。試行錯誤しながら学習を進めていく際に、家庭学習で行った微分係数と導関数の定義や性質に注目する生徒ａの様子が見られた。この生徒は、グラフが増加するときと減少するときで接線の傾きがどのように変化をするのかについて注目していた。そして、実際に自身で書いた適当な曲線に対して、傾きが正や負となるような複数の接線を記述した。この記述により、接線の傾きが正（負）のとき、そのグラフは増加（減少）すると考察した（図１）。これにより、微分係数により接線の傾きが求められるという既習の学習内容を活用し、微分係数の正負を把握することで、グラフの概形がかけることを自身で見いだすことができた。また、他者との交流を通して、導関数のグラフの概形に注目すると、微分係数の正負を把握することができるとい

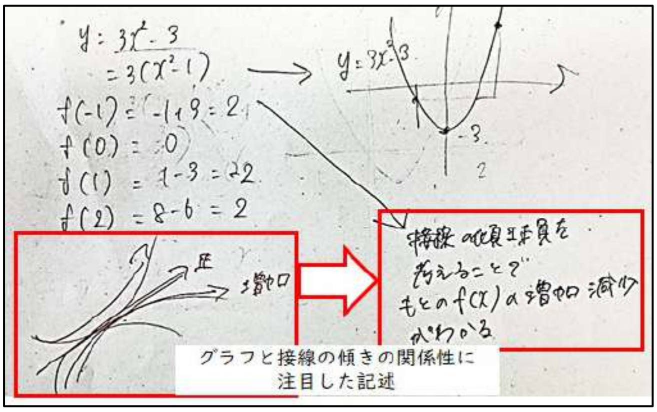



図１ グラフと接線の傾きの関係性に注目している生徒ａの記述（囲み線、コメントは筆者）

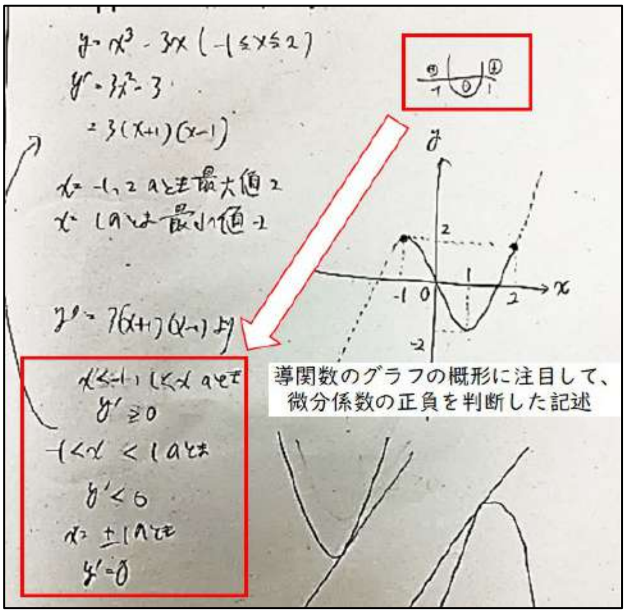
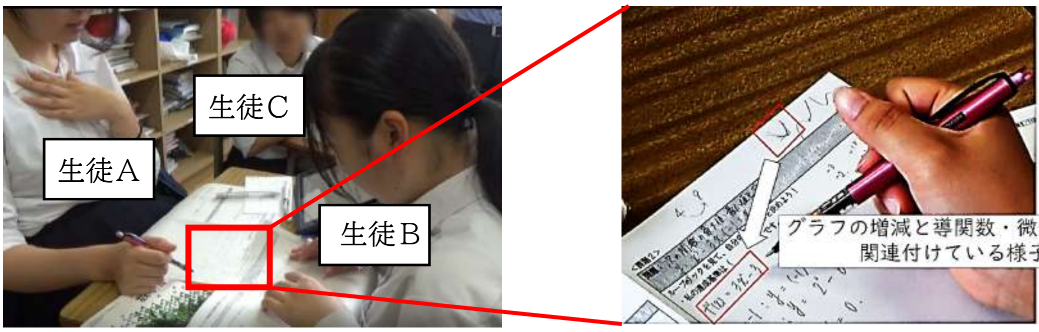



図２ 導関数のグラフの概形に注目して、元の関数の増減を判断している生徒ｂの記述（囲み線、コメントは筆者）

った、二次不等式で学習した解法を基に、三次関数のグラフの概形を求めている生徒ｂもいた(図２)。このように増減表を用いずに、微分係数と導関数の定義や性質を活用してグラフを記述し、三次関数の最大値・最小値を求めることができた生徒が多数見られた。また、他者との協議を通して、接線の傾きが０のときはそのグラフは増加も減少もしない点であることに気付いた生徒の様子を以下に示す(図３)。




生徒Ａ：接線の傾きが正のとき、(もとの関数は)増加するのかな。
生徒Ｂ：同じように考えると傾きが負のときは、減少するよ。
生徒Ｃ：場合分けってことかな。
生徒Ｂ：(グラフに複数の接線をかきながら)接線をかくと、グラフが減少するときと増加するときのイメージできるよ。
生徒Ｃ：つまり、微分係数が負のときは、減少するってことなのかな。
生徒Ａ：(導関数を指しながら)これが０になるときは、(グラフの)底ってこと。
生徒Ｂ：そういうことか。
生徒Ａ：すごい。

図３　三次関数のグラフの増減について、導関数と微分係数を基に協議する生徒の様子

## ４　まとめ

### （１）　成果

生徒は第４時の授業で獲得した概念や解法を基に、三次関数の最大値・最小値に関わる類題に取り組み、それらが他の問題にも活用できるのか確認した。このような数学的活動を通じて、生徒は微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることにでき、生徒自身で数学における新たな概念、原理や法則などを見いだしたり学んだりすることにつながった。

### （２）　課題点とその改善案

課題点は２点ある。１点目は、クラス全体で共有するための手立てについてである。指導者が生徒の進捗状況に不安を感じて、頻繁に問題を解決するための手立てを共有しすぎると、指導者による解決するための指針を聞くことを意識してしまい、自身で試行錯誤しながら見通しを立てることをやめてしまう生徒が一部いた。「問題を解決するための指針をどの程度共有するのか」や「授業のどの時間で共有するのか」など、生徒の実態に応じて丁寧に授業を計画する必要がある。

２点目は、第５時における「＜課題２＞(２) $y = x^3 + 2x$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値・最小値を求めよ」という極値のない学習課題についてどのように考察させるかについてである。生徒は、第４時に獲得した概念や解法を基にこの学習課題に取り組んだが、なかなか解くことができなかった。これは、第４時において、「微分係数が０のとき、もとの関数の増減が変わる」ことを意識してしま

ったことが原因であると考えられる。改善案としては、「微分係数が正のときと負のときで、もとのグラフがどのような状態にあるのか」や、「グラフが大きく増加するときと小さく増加するときでどのような違いがあるか」などを考察させることで、生徒はその課題を通じて、自身が獲得した概念や解法を見直すことができると考える。

## 【数学Ⅲ「無限等比級数」（数研出版　高等学校数学Ⅲ）における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

### 1　はじめに

数学Ⅲ「無限等比級数」（数研出版　高等学校数学Ⅲ）を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対して[B]「見通しを立てる」数学的活動を行った。無限等比級数という題材については、無限等比数列から無限級数の流れで学習を進めることから、生徒にとって比較的理解しやすい題材だと推察される。一方、生徒が無限等比級数に関する例題の解答を基に類題を解答することにより、無限等比級数の定義や性質の成り立ちについて理解が深まっておらず、無限等比級数について本質的な理解につながっていないことが考えられる。そこで、この授業では日常生活や社会の事象などを基にした学習課題を通じて、生徒自身で無限等比級数の定義や性質を見いだす数学的活動を行い、この題材について本質的な理解につなげるようにした。

### 2　指導の計画と方法（指導上の工夫）

#### （1）　単元の目標

・数列の極限について理解し、数列 $\{r^n\}$ の極限などを基に簡単な数列の極限を求めることができる。（知識及び技能）
・無限級数の収束、発散について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めることができる。（知識及び技能）
・数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。（思考力、判断力、表現力等）
・無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対して考察することができる。（思考力、判断力、表現力等）
・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。（学びに向かう力、人間性等）

#### （2）　評価規準

| 知識・技能<br>[知] | 思考・判断・表現<br>[思] | 主体的に学習に取り組む態度<br>[態] |
|---|---|---|
| ●数列の極限について理解し、数列 $\{r^n\}$ の極限などを基に簡単な数列の極限を求めている。<br>●無限級数の収束、発散について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めている。 | ●数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。<br>●無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対して考察している。 | ●事象を関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。 |

（３） 指導計画（枠内が本研究で扱った学習内容である）

| 時 | 学習内容 | 学習の目標 |
|---|---|---|
| 1 | ●数列の収束・発散 | ・数列の収束するときと発散するときの条件について理解し、その条件を基に極限を求めることができる。 |
| 2 | ●はさみうちの原理 | ・はさみうちの原理を理解し、数列の極限を求めることができる。 |
| 3 | ●無限等比数列の極限 | ・無限等比数列の極限の性質を学び、それを活用して、数列の極限を求めることができる。 |
| 4 | ●漸化式で表された数列 | ・漸化式で表された数列の極限を求めることができる |
| 5 | ●無限級数の収束とその和 | ・無限級数の収束とその和の定義について理解し、様々な無限級数の和を求めることができる。 |
| 6 | ●無限等比級数の収束・発散 | ・収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。 |
| 7 | ●無限等比級数の応用 | ・やや複雑な図形の問題に興味を持ち、無限等比級数を利用しようとすることができる。<br>・循環小数を無限等比級数の和の公式を用いて、分数に直すことができる。 |
| 8 | ●無限級数の性質 | ・等比数列の実数倍や和・差による無限級数の和を収束条件の確認をして、求めることができる。<br>・数列の極限値の性質に気付き、実数倍や和・差による無限級数の和の求めることができる。 |

（４） 学習の展開例

第６時（無限等比級数の収束・発散）の学習展開例

◎学習の目標
・収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。（思考・判断・表現）

| 時間 | ◇学習活動<br>●主な発問または指示 | ☆予想される生徒の反応 | ・指導上の留意事項<br>※評価規準 |
|---|---|---|---|
| 10分 | ◇今回の授業の目的について理解する。<br>●「今回の授業は、皆さんがまだ学習したことのない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるよ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | うになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょうか。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。 | | |
| | ◇未習の学習内容である例題を解答する。 | | |
| | ＜課題１＞コップの水はあふれるのか考えよう。<br>①　２００mL のコップに水を１００mL 入れます。<br>②　①の後に、追加で①で入れた半分の量の水(５０mL)を入れます。<br>③　②の後に、追加で②で入れた半分の量の水(２５mL)入れます。<br>②、③のように半分の量の水をどんどんコップに追加して入れていくとコップに入っている水はあふれるのかな。 | | |
| | ◇予想する<br>●「あふれる」「あふれない」を選んだ生徒にそれぞれなぜなのか聞く。 | ☆水がどんどん追加されているから、あふれそう。<br>☆追加する水はどんどん少なくなっているからあふれない。 | |
| | ●指導者が正解は「あふれない」ことを生徒に伝える。 | | ・「なぜ、水がどんどん追加されているのに、あふれないのだろうか」と伝え、生徒の興味をひきつける。 |
| 15分 | ◇数式で表現する。 | | |
| | ＜課題２＞＜課題１＞について、数学的に表現された式にしよう。 | | |
| | ●＜課題１＞について、数学化して、立式させる。 | | |
| | ●前時で学んだことを生かすと、この課題が解決できることを伝える。 | ☆これは等比数列の和が関係してそう。 | |
| | ◇表現した数式を解答する。 | | |
| | ＜課題３＞＜課題２＞について、数学的に表現された式を解こう。 | | |

15分

●ロイロノートを活用して、生徒の解答を提出させる。

●生徒の記述を基に、指導者は解説をする。

◇自身で無限等比級数の公式を見いだす。

<課題４><課題３>を基に、無限等比数列から作られる無限級数について、きまりを見つけて、自分で公式を見つけよう。

◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入ってある「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。

<「マスめがね」による提示>
・初項をa、公比をrとして、一般化して考えてみよう。
・公比の数値を変えると、無限級数はどのように変わるのかな。

◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。

・ルーブリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。

【改善案】
・「一般化」と「具体化」が相互に関連付けられるように、「マスめがね」を一部変更するとよい(p.74の図３参照)。

<ルーブリック>

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえて記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式を記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式を見つけようとした。 |

◇できた生徒については、自身の解答をルーブリックを基に自己評価し、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。

※思
収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10分 | ◇授業のまとめをする。<br><br>●無限等比級数について、生徒の記述を基に、解説する。<br><br>●「今回の授業では、自分の力で公式やきまりを見いだして、問題を解決することができました。実はこのような未知の問題に対して、自分たちで試行錯誤しながら解決する力はいま社会で求められている力です。今日は、こんな力を身につける授業を行いました」と伝える。 | | |

準備物

・１人１台端末・大型提示装置

# 数列の極限（自分で公式を見いだそう）

＜課題１＞

問題：コップの水はあふれるのか予想しよう。

① ２００mlのコップの半分、水を入れます。

② ①の後に、追加で①で入れた量の半分の水を入れます。

③ ①②の後に、追加で②で入れた量の半分の水を入れます。

②③のように水をどんどん追加してコップに入れるとコップに入っている水はあふれるのかな。

あなたが予想した方に○をつけよう

あふれる　・　あふれない

簡潔に理由をかこう

【理由】

＜課題２＞

＜課題１＞について、数学的に表現された式にしよう。

＜課題３＞

＜課題２＞について、数学的に表現された式を解こう。

＜課題４＞

＜課題３＞を基に、無限等比数列から作られる無限級数について、きまりを見つけて、自分で公式を見いだそう。

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえて記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式を記述した。 | 無限等比数列から作られる無限級数についての公式を見いだそうとした。 |

・私の達成基準は（　　　　　　）です。

### （５） 指導上の工夫について（第６時）

本授業の指導の工夫として、２点ある。１点目は、日常生活や社会の事象を基にした学習課題を基にすることで、生徒のこの題材についての興味・関心を引き出し、生徒がこの学習課題について解決したいと思える必要性を感じさせるようにしたことである。探究的な学びを進める際には、生徒が主体的に取り組みたいと思える仕掛けが大切である。そこで、＜課題１＞のような今までの経験から予想すると「コップの水があふれる」という生徒の予想と、「あふれない」という数学的な解答との差異を基に、学習課題を設定することで、生徒はこの課題を解決したいと思い、主体的に数学的活動を進めることができると考える。２点目は、問題を解くのではなく、定義や性質について考察を深めることを重視した点である。高等学校数学科における授業では、「定義や性質についての説明」→「例題の解説」→「類題を解答する」といった一連の流れが多いと考える。この一連の流れにより、生徒が定義や性質についての理解より、問題を解答することを重視することにつながると推察される。そこで、本授業ではこの一連の流れを、「日常生活や社会の事象といった具体的な問題を自身で解答する」→「一般的にその解法が成り立つのか、自身で定義や性質について見いだす」といった学習の流れにすることで、定義や性質についての理解をより深められるようにする。

### ３ 授業の実際（第６時）

授業の冒頭で、「＜課題１＞コップの水はあふれるのか」について、生徒が予想すると、約半数の生徒が「コップの水はあふれる」と回答していた。その理由として、「１００＋５０＋２５＋・・・のように無限に足し算ができるから」や「追加する水の量が０になることはないため、いつかあふれる」と回答する生徒が多かった。一方、あふれないと回答した生徒については「追加する水の量がどんどん減っていくから」や「追加する水の量が収束するから」といった回答が見られた。生徒が予想した後、その理由について話し合う際には、「あふれる」と回答した生徒も「あふれない」と回答した生徒もそれがなぜなのかについて疑問をもつことにつながった。指導者は、結果として「あふれない」ことを伝え、それがなぜなのかについて数学的に考えてみようと伝えた。生徒は以前に学習した無限等比数列から、この学習課題は無限等比数列に関係しているのではないかと考え、自身のもつ知識や技能を活用して、立式することができた。その後、その立式した数式を解き、コップの水はあふれないことを理解することにつながった。この後、指導者はこの立式した数式が一般的にはどのようなことがいえるのかについて考察してみようということから、生徒は自身でその公式の一般化について考察した。ここで

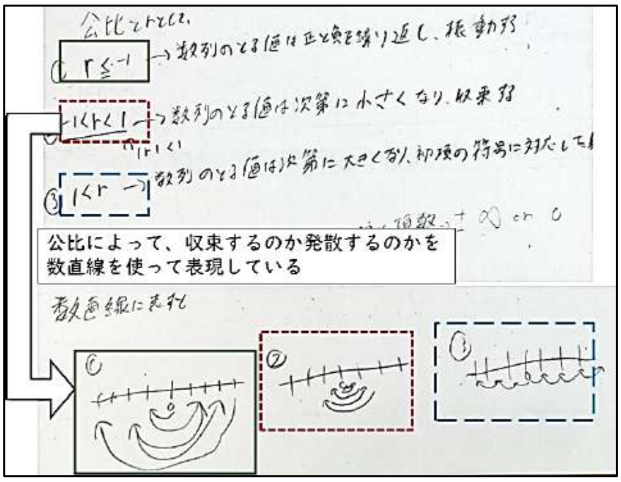



図１　ルーブリックを基に自分なりの表現をした生徒ａの記述

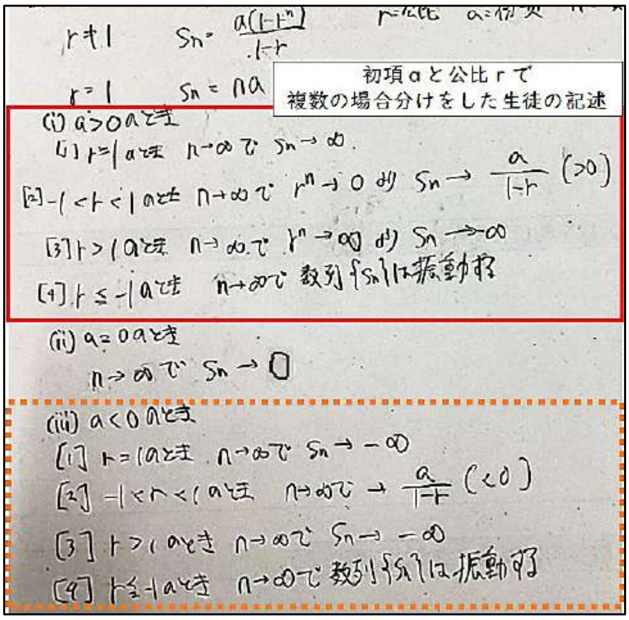



図２　試行錯誤しながら無限等比級数についての何層にも場合分けをして考察した生徒ｂの記述

は、グループで協議しながら学習を進めた。生徒ａは、ルーブリックのＡ評価である「無限等比数列から作られる無限級数の公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述できた」を確認しながら、単に公式を導くだけでなく、数直線を用いて収束するのか発散するのかを自分なりに表現して、その学習において本質的な理解につなげようとする記述をした（図１）。また、教科書等では無限等比級数の公式について「収束する」「発散する」としか記載していないことから、無限等比級数の公式について生徒の考察を深める機会がなかなかないが、生徒ｂは初項ａと公比ｒのそれぞれで場合分けを複数して、今まで学習してきた「正に発散する」「負に発散する」「振動する」などで表現をした（図２）。

## ４　まとめ

### （１）　成果

　このような数学的活動により、生徒は自身で無限等比級数の公式を見いだそうとすることで、新たな概念、原理や法則を自身で獲得することにつながった。

### （２）　課題点とその改善案

　課題点は２点ある。１点目は、生徒がそもそも数列についての理解がどの程度あるのかということについてである。この授業では、一部の生徒が数学Ｂで学習する等比数列の和についての知識についてしっかりと定着していなかった。そのため、今回の学習内容について立式することがそもそも困難に感じている様子が見られた。改善案としては、生徒の状態に応じて、生徒同士で協議する時間を取ったり指導者による解説を長めにとったりして生徒の既習の学習内容である数列に関して振り返りをする時間が必要であったと考える。

　２点目は、一般化した式と具体化した式を関連付けることについてである。この一般化した式と具体化した式を相互に関連付けることを生徒自身ができるようになるとこの学習内容だけでなく、数学におけるすべての学習内容に活用できる重要な考え方を得ることにつながる。今回の授業では、「コップの水はあふれるのか」について具体的な数値を活用して学習を進めたが、公式について生徒自身で見いだす場面になると、一部の生徒はそれまで取り組んできた具体化した式を活用することなく、まったくの別物として一般化した公式を見いだそうとしていた。この一般化した式と具体化した式を相互に関連付けるような工夫が必要であると考えたことから、改善案として図３のように「マスめがね」を活用したいと考える。これを活用することで「コップの水を最初に50mLいれるとどうなるのかな」や「他の事象においてもこの式は成り立つのか」といった初項や公比についての場合分けのイメージをもつことにつながり、一般化した式と具体化した式を相互に関連付ける一助となるのではないかと考える。

【改善案】

＜「マスめがね」による提示＞
・初項をa、公比をrとして、一般化して考えてみよう。
・コップの水を最初に50mL入れるように変更したり追加で入れる水の量を２倍にしたりするなど、初項や公比の数値を変えると、無限級数はどのように変わるかな。

図３　「マスめがね」の改善案