

【数学Ⅰ「二次関数の決定」(数研出版 新編数学Ⅰ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅰ「二次関数の決定」(数研出版 新編数学Ⅰ)を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基に[A]「問題を見いだす」数学的活動を行った。生徒は、この授業までに二次関数の決定を除く二次関数のすべての内容について学習している。そして、本時の授業で「二次関数を決定するための条件として、何が必要なのか考察せよ」という学習課題に取り組んだ。この学習課題を設定した理由としては、生徒が自身の既習の学習内容を関連付けて、二次関数を決定する条件を自身で見いだすことができれば、二次関数の式やグラフと二次関数を決定する条件とのつながりを感じ、それらが相互に関係していることについて感じられると考えたためである。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。(知識及び技能)
- ・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。(知識及び技能)
- ・二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解することができる。(知識及び技能)
- ・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。(知識及び技能)
- ・二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解し、二次関数の最大値や最小値を求めている。 ●二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解している。 ●二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を二次関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしていたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1 ～ 2	●関数の値・一次関数	<ul style="list-style-type: none"> 関数について理解し、関数の値を求めることができる。 傾きと切片に着目して、一次関数のグラフを書くことができる。
3 ～ 9	●二次関数のグラフ	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数の式の変化をグラフの平行移動とみて考察することができる。 二次関数の軸と頂点を求め、グラフを書くことができる。 二次関数の値の変化をグラフから考察することができる。
10 ～ 12	●二次関数の最大値、最小値	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数の最大値や最小値を求めることができる。 日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。
13 ～ 15	●二次関数の決定 (本時：第14時)	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。 与えられた条件から二次関数の式を求めることができる。
16 ～ 17	●二次方程式の解、二次関数のグラフとx軸との共有点	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数のグラフとx軸との共有点のx座標を求めることができる。 二次関数のグラフとx軸との共有点の個数や位置関係を二次関数と関連させて考察することができる。
18 ～ 21	●二次関数のグラフと二次不等式、二次不等式の解	<ul style="list-style-type: none"> 二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。

(4) 学習の展開例

第14時に向けての家庭学習

◇学習活動	・指導上の留意点
◇教科書p104練習21の問題を解く。	
<div style="border: 1px dashed gray; border-radius: 15px; padding: 10px; background-color: #fff9e6;"> <p><課題1> 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。</p> <p>(1) 頂点が点 (1, -3) で、点 (3, 5) を通る</p> <p>(2) 軸が直線 $x = -1$ で、2点 (0, 5)、(2, -11) を通る</p> </div>	
◇課題を解き、ロイロノート「提出箱」に提出する。	

第14時(二次関数の決定)の展開例

◎学習の目標

・二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。(思考・判断・表現)

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
15分	<p>◇今回の授業の目的を理解する。</p> <p>●「この授業では、問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を発見することが目的である」ことを伝える。</p> <p>◇家庭学習の内容を振り返る。</p>	<p>☆予想される生徒の反応</p>	<p>・指導上の留意事項 ※評価規準</p>
<p><課題1> 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。</p> <p>(1) 頂点が点(1, -3)で、点(3, 5)を通る</p> <p>(2) 軸が直線$x = -1$で、2点(0, 5)、(2, -11)を通る</p>			
	<p>●生徒の記述を基に、どのように解答したか発問する。</p> <p>●「実験プリント」を使って、(1)のグラフをかくように伝える。</p> <p>●例えば、頂点や通る点の値を変更しても、二次関数を求めることができるのかな。確かめてみよう。</p> <p>●<課題1>の条件である「頂点と通る1点」を「頂点のみ」にすると二次関数はどうなるのかな。</p> <p>●二次関数の式を求める条件として、何が分かれば二次関数を求めることができるのかな。</p>	<p>☆平方完成した式に条件を当てはめて、二次関数を求めた。</p> <p>☆できるのかな・・・。</p> <p>☆式は変わるけど、二次関数を求めることができた。</p> <p>☆二次関数はできない。</p> <p>☆なんだろう・・・。</p>	<p>・$y = a(x - p)^2 + q$を活用して、問題を解いてくることから、黒板に$y = a(x - p)^2 + q$を記述する。</p> <p>・「実験プリント」を使って、生徒に確かめてもらう。</p> <p>・「頂点のみ」の条件だと二次関数が決定できないことも伝える。</p> <p>・「二次関数を決定する」ということについてふれる</p>
	<p>【改善案①】 「実験プリント」を活用する際に、ロイロノートの「共有ノート」を活用して生徒全体の考えを共有すると、二次関数を決定する条件とはどういうものなのかイメージしやすい。</p>		

25分

<課題2> 二次関数を決定するための条件として、何が必要なのか考察せよ。

●ロイロノートを活用して、どの「カード」を組み合わせたら二次関数が決定できるのか考えよう。その際、「実験プリント」を活用して、どの条件であれば、二次関数を決定できるのか調べよう。

◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入っている「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。

- ・入力されていない「カード」については各自に必要な条件を打ち込むように指示する。
- ・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。

<「マスめがね」による提示>

- ・二次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ で考えると、どのようなことがわかるのかな。
- ・二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で考えると、どのようなことがわかるのかな。
- ・二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせには何の違いがあるのかな。

◇生徒は、学習の道しるべとしてルーブリックを活用する。

- ・ルーブリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。

<ルーブリック>

A	B	C	D
二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて <u>5つ以上</u> 作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて <u>3つ以上</u> 作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて <u>1つ以上</u> 作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、作成しようとした。

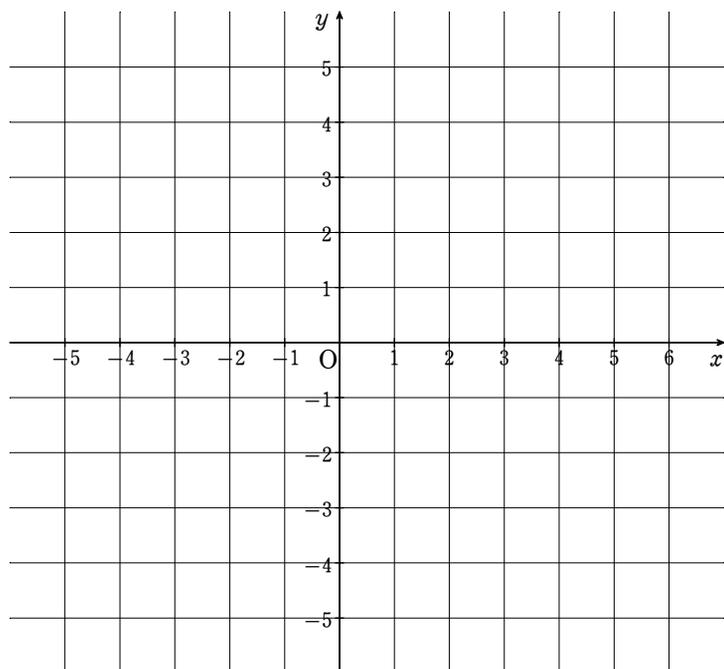
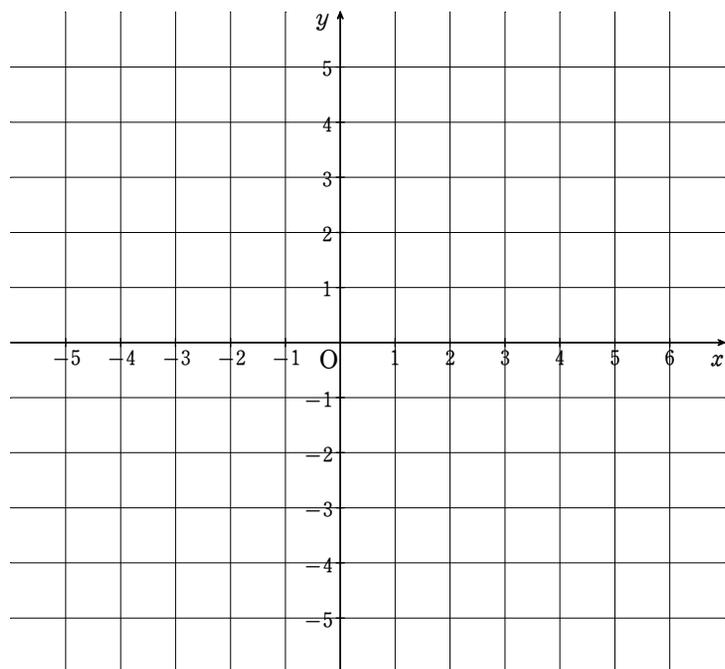
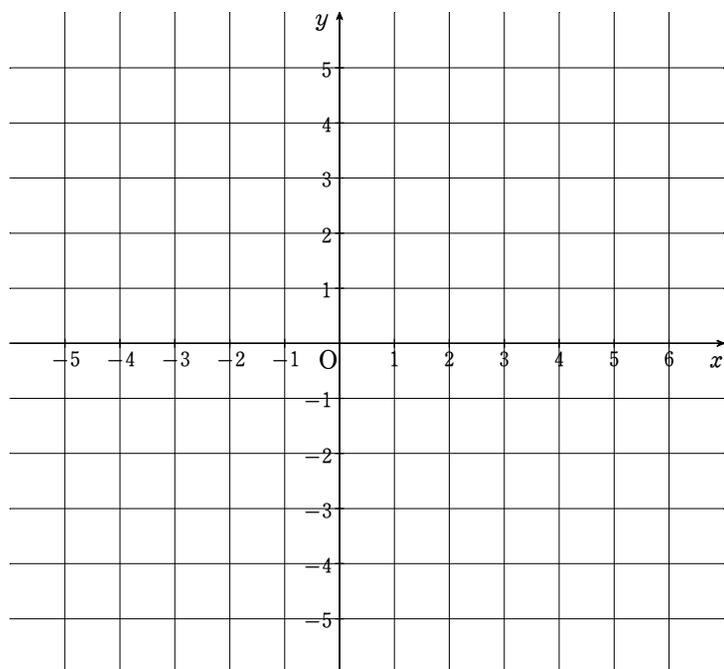
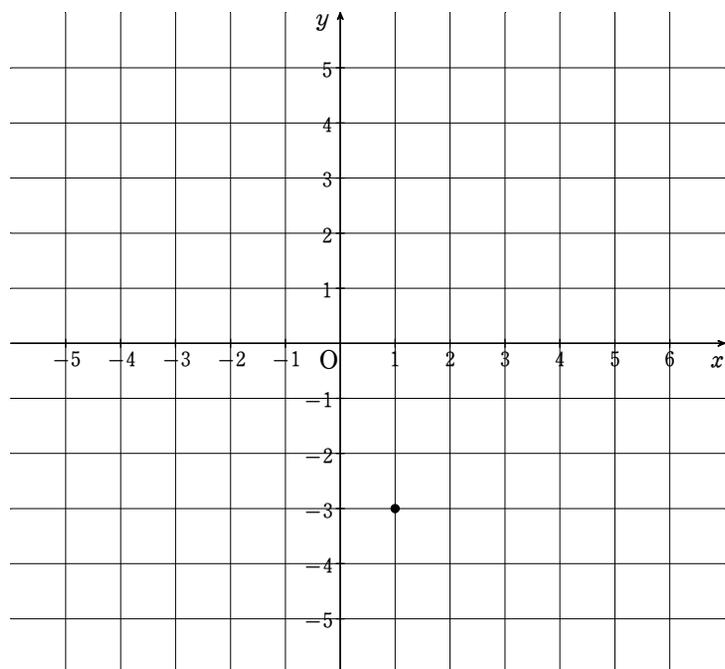
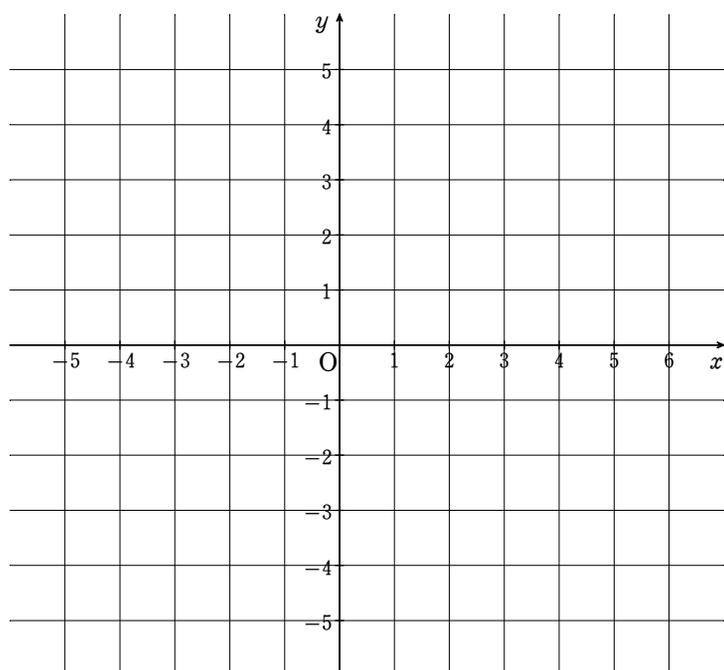
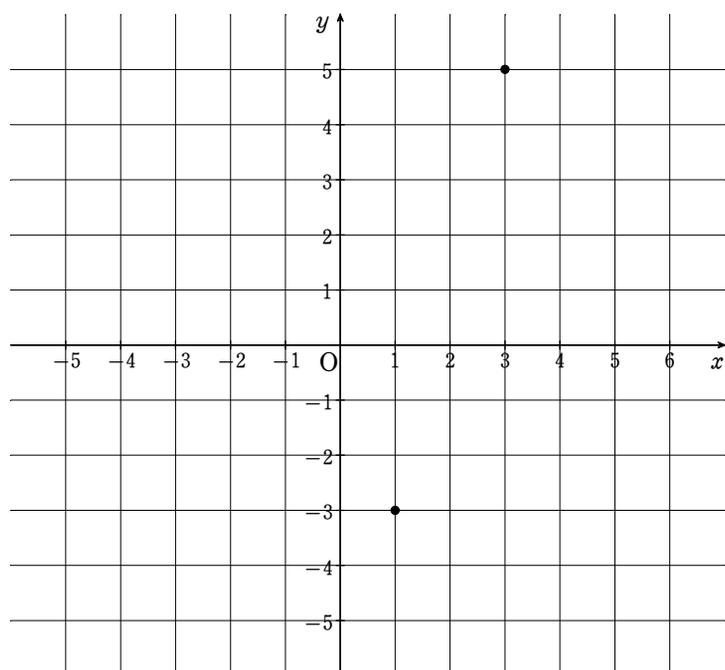
●<課題1> からなにかわかることはないかな。

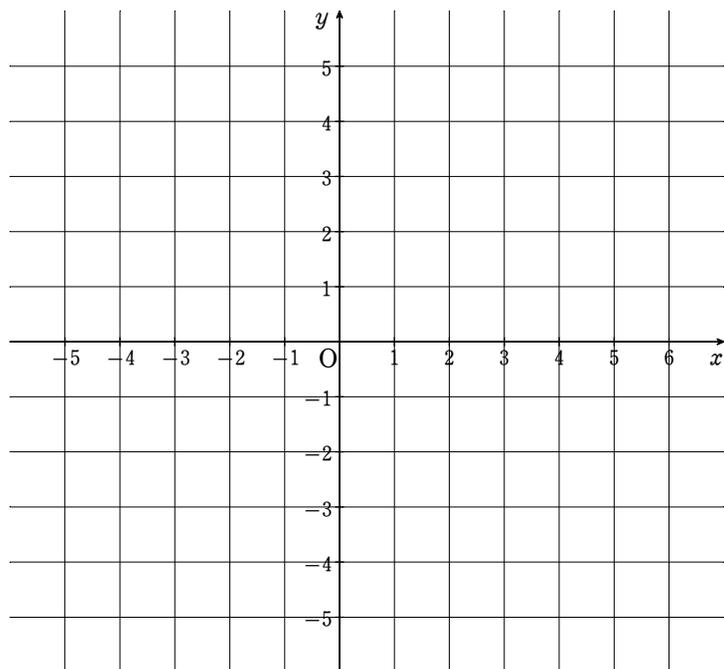
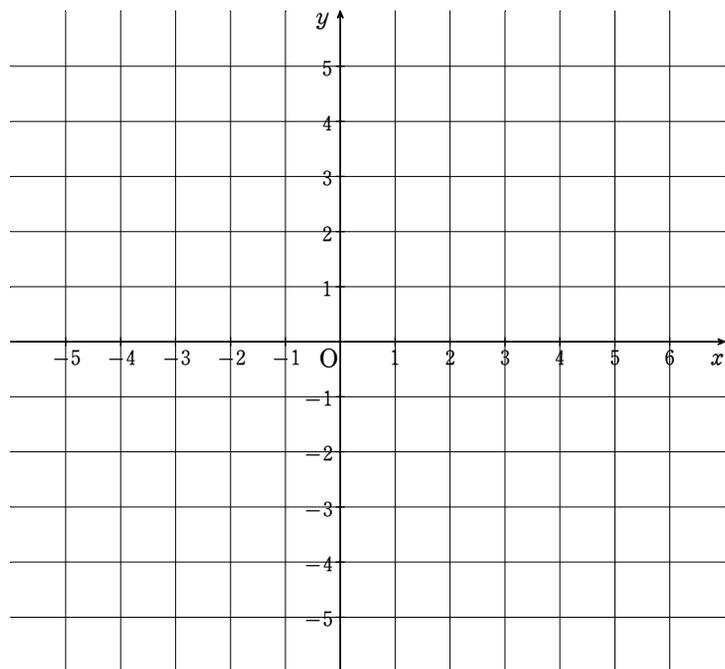
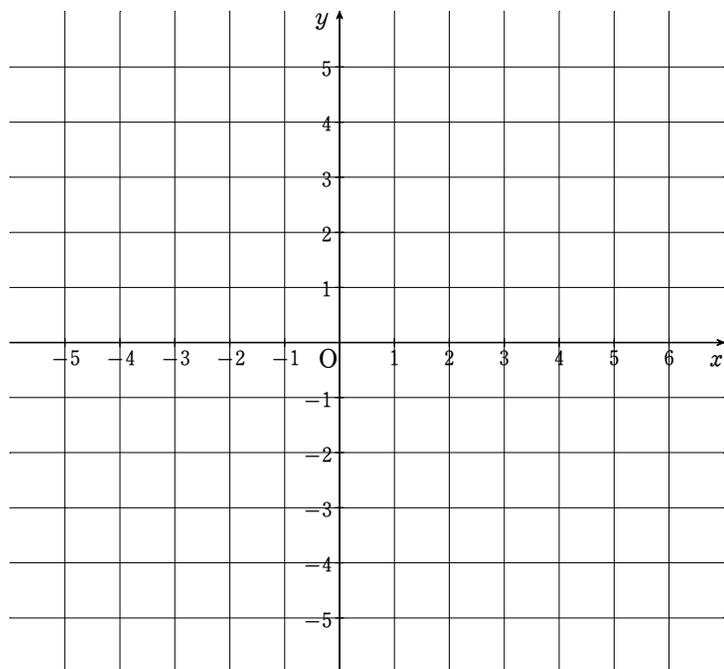
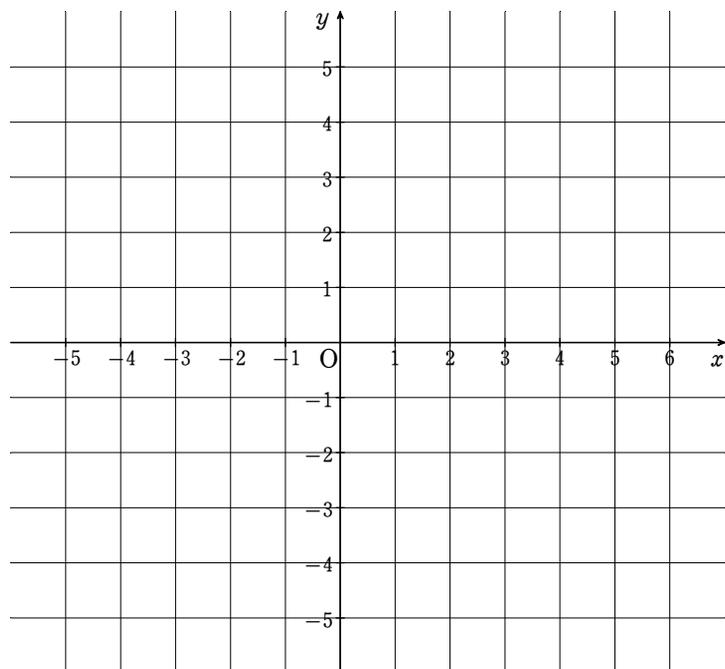
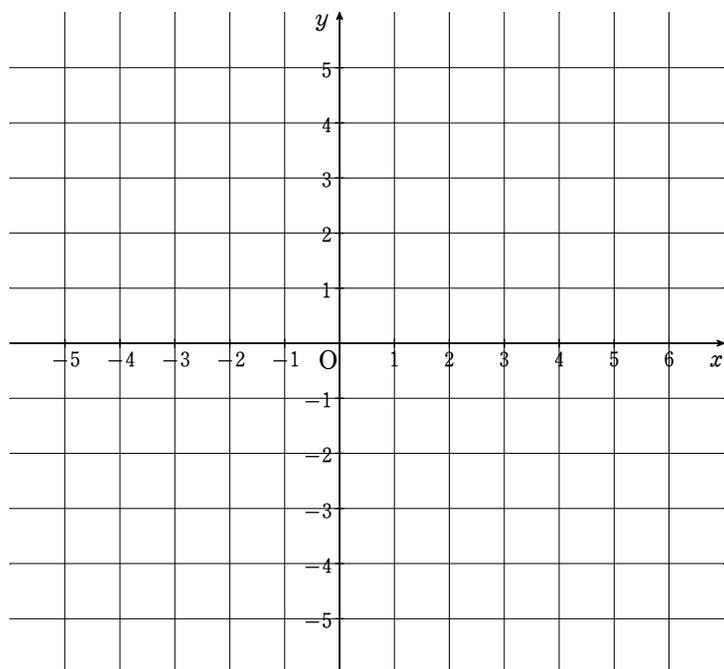
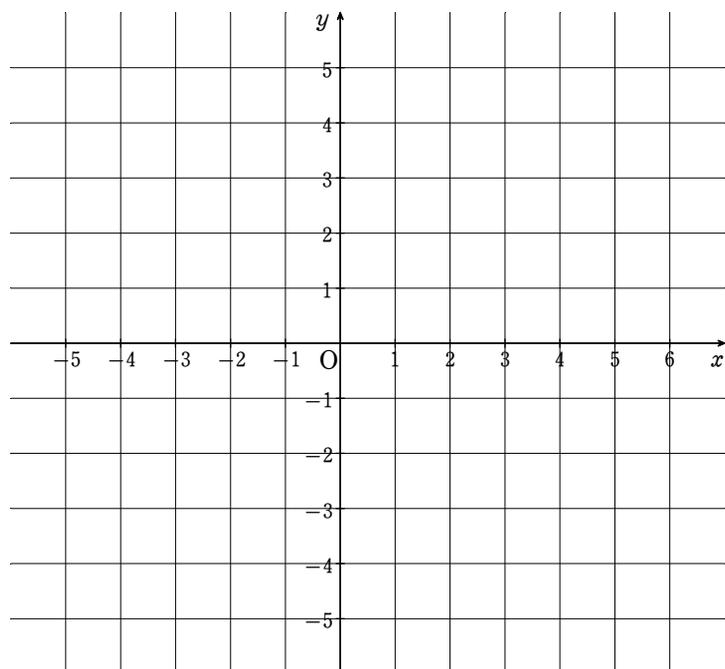
☆「頂点と通る1点」「軸と通る2点」が分かれば、二次関数が決定できる。

10分	<ul style="list-style-type: none"> ●二次関数を決定できない条件についてもロイロノートに示されているカードを基に考えてみよう。 ●<課題1>(1)の解答である $y = 2(x - 1)^2 - 3$ を変形することはできないかな。 ●$y = 2x^2 - 4x - 1$ は二次関数ではないのかな。 ●では、この展開された式(標準形)でも考察してみよう。 ●二次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ と $y = ax^2 + bx + c$ の2種類について、未知の文字が二つあれば、二つ式が必要であるといったことについて考察していれば、全体で共有する。 ●生徒の提出内容を基に、二次関数を決定する条件について、まとめる。 ●これらの条件によって、二次関数のグラフが本当にかけるのか、「実験プリント」を使って確認させる。 ●二次関数を決定するためには、未知の文字を求めることができる条件が必要であることを理解させる。 	<p>☆ $y = 2x^2 - 4x - 1$ になる。</p> <p>☆二次関数である。</p> <p>☆軸と通る2点が必要である。 ☆3点を通る</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・決定できない条件を考えることも大切であることをおさえる。 ・これら二つの式は同じ二次関数であることをおさえる。 ・黒板に示した $y = a(x - p)^2 + q$ の隣に $y = ax^2 + bx + c$ を記述する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>※ 二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・グラフを通して、4点を通ることについて、指導者から生徒に問いかけ、3点が分かれば、条件として成り立つことを説明する。 ・「頂点と通る1点」「軸と通る2点」「通る3点」がわかると二次関数が決定できることについて、生徒への発問を通して、伝える。
-----	---	---	--

準備物

- ・1人1台端末・大型提示装置





二次関数（二次関数を決定する条件を見つけよう）

<課題1> 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (2, 5) で、点 (-1, -4) を通る

(2) 軸が直線 $x=-1$ で、2点 (0, 5)、(2, -11) を通る

<課題2>

二次関数を決定するための条件は、一般的に何が必要なのか考察せよ。

ループリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

A	B	C	D
二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて5つ以上作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて3つ以上作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、合わせて1つ以上作成した。	二次関数が決定できる組み合わせと決定できない組み合わせを、作成しようとした。

・私の達成基準は（ ）です。

二次関数を決定できる	二次関数を決定できない
例 頂点と通る1点	
これだとどのような条件なのか	

【改善案②】

生徒がグラフと数式を関連付けて考えるためには、例示する必要があることから、「例 頂点と通る1点」のように示すと二次関数を決定する「条件」とは何なのか考察しやすくなると考える。

(5) 指導上の工夫について(第14時)

指導の工夫として、生徒に二次関数を決定するということがどのような状態を指しているのか、グラフを基に実感できるようにすることである。授業の冒頭では、グラフに記載された「頂点と通る1点」という2点の条件を基にグラフをかくことを行う。すると、グラフがただ一つに定まる、つまり二次関数が決定されることを生徒に実感できるようになる。その次に、「頂点のみ」という1点のみの条件を基にグラフをかくことを行う。すると、無数の二次関数のグラフがかけることを生徒が確認することにつながり、二次関数が決定できないことを実感できるようになる。このように、二次関数を決定「できる」場合と「できない」場合を生徒に実感できるようにすることで、「どんな条件ならば二次関数が決定できるのか」という学習課題に対して生徒が解決したいと感じ、その後の数学的活動を充実させる。

3 授業の実際(第14時)

授業の冒頭において、生徒は前時に学習した「『頂点と通る1点』と『軸と通る2点』を基に二次関数を求めよ」という学習課題について確認した。その後、生徒はその学習課題の解決過程を振り返る際に、「『頂点と通る1点』の数値が変更されても、二次関数は決定できるのか」や「『頂点のみ』の条件だと二次関数は決定できないのか」という指導者による問いかけについて考察した(図1)。そして、生徒はこれらの考察を通じて「二次関数を決定する条件として、何が必要なのだろうか」という学習課題に取り組んだ。生徒aは、指導者が定義した「軸と通る2点」を基にした学習課題について考察し、「『軸と通る1点』だと二次関数は本当に決定できないのか」という問いが生まれ、複数のグラフを記述して、二次関数が決定できないことに自身で気付いた。また、「『頂点と通る1点』だと求めたい文字が一つなので立式として一つ必要である。そして、『軸と通る2点』だと求めたい文字が二つなので式が二つ必要である」といった数学的に考察する生徒bの姿が見られた。その生徒は、 $y = ax^2 + bx + c$ について、「a、b、cが分かるようにするためには、x、yの組み合わせが三ついる。だから、『通る3点』が分かれば二次関数を決定できる」といった考察をし、自身で二次関数を決定する条件を見いだすことができた(図2)。さらに、「マスめがね」で示された「二次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ で考えると、どのようなことがわかるのかな」を基にしながら、教科書に記載されていない「 $y = a(x-p)^2 + q$ におけるaの条件」について他者と協議する生徒の姿が見られた。この協議を通じて、二次関数を決定する条件について発展的に考察する生徒の協議の様子を以下に示す(図3)。

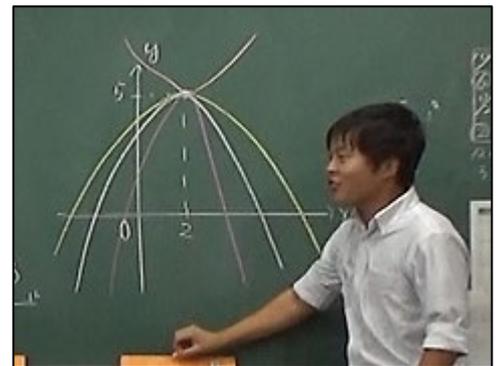


図1 「頂点のみ」の条件だと二次関数は決定できないことをグラフで示す指導者の様子

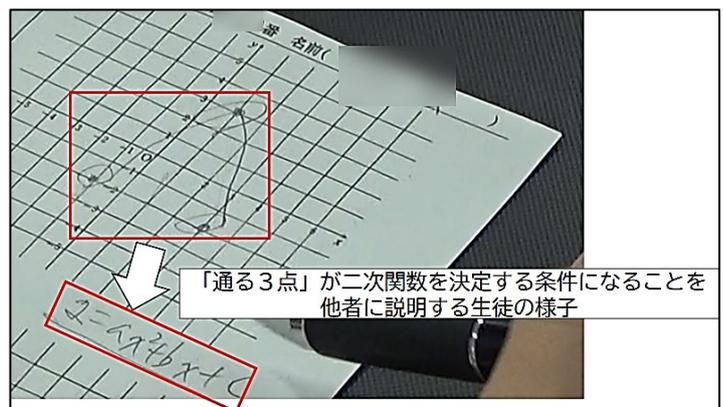


図2 自身で二次関数を決定する条件を見いだす生徒の様子

二次関数を決定できる	二次関数を決定できない
$a \neq 0$ のとき	$a = 0$ のとき
$y = a(x-p)^2 + q$ における a に注目した記述	

生徒c：（「マスめがね」に示されている「 $y = a(x-p)^2 + q$ 」を見ながら）この a はなんだろう。
 生徒d：（下に凸と上に凸を表すジェスチャーをしながら）これとこれを表すものかな。
 生徒c：これらは、正と負のときに表すものだよ。0のときはどうなるの。
 生徒d：0のときは・・・わからない。
 生徒c：そもそも a が0になったらだめだと思う。だって、 x^2 が消えるから。
 生徒d：たしかに。

図3 教科書に記載されていない二次関数を決定する条件について協議している生徒の様子

4 まとめ

(1) 成果

このような数学的活動を通して、二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことで、グラフと数式の関係について理解を深める一助となった。

(2) 課題点とその改善案

課題点は、より多くの生徒がグラフと数式を関連付けて考えるためには、更なる仕掛けが必要であったことである。この実践における目標が「二次関数を決定する条件を生徒が自身で見いだすことができる」であるが、生徒全員が1単位時間でその思考にはたどり着かなかった。その理由として考えられることは2点ある。

1点目は、二次関数を決定する「条件」とは何なのか、生徒の理解が得にくく、この学習課題を進める際に一部の生徒に混乱があったことである。改善案については、授業の冒頭で、指導者による「頂点と通る1点」という二次関数を決定する条件の提示を基に学習プリントに例示すると、生徒は二次関数を決定する「条件」の示し方が伝わったのではないかと考える(p.8参照)。その後の数学的活動においても、<課題1>を基に例示したことで、<課題2>はどうかかという思考にたどり着き、二次関数を決定する条件について円滑に考察できるのではないかと考える。

2点目は、数学の授業において、条件を変更したり定義や性質について自身で見いだしたりする機会が少ないことにより、この授業のような自身で二次関数を決定する条件を見いだすという思考に慣れていない生徒がいたことである。指導者が学習課題を提示し、それを生徒が解答するという「問題を解決する」過程を重視する授業だけでは、自立的に条件を変更したり問題を拡張したりして考察することに生徒が困難さを感じたのではないだろうか。単元に1回、学期に1回でも生徒が自立的に条件を変更したり定義や性質について見いだしたりする授業を行うことで、この授業だけでなく、普段の授業においても生徒が自立的に「問題発見・解決の過程」を遂行しようとするにつなげるのではないかと考える。