

【数学Ⅰ「二次関数の最大値、最小値」(数研出版 新編数学Ⅰ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅰ「二次関数の最大値・最小値」(数研出版 新編数学Ⅰ)を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対して[B]「見通しを立てる」数学的活動を行う。生徒は、この授業までに「平方完成をして二次関数のグラフをかく」ところまで学習している。二次関数の最大値・最小値について未習の状態である生徒は、本時の授業において既習の学習内容を活用して「針金を使って、長方形を作り、面積が最大のとときと最小のときは横の長さが何cmのとときか」という学習課題に取り組む。この学習課題を設定した理由として、日常生活や社会の事象に関わる題材と通じて、二次関数のグラフをかく有用性をより伝えることができたり、二次関数の最大値・最小値の解法を自身で見いだしたいと思えたりできると考えたためである。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解できる。(知識及び技能)
- ・二次関数の最大値や最小値を求めることができる。(知識及び技能)
- ・二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解することができる。(知識及び技能)
- ・二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。(知識及び技能)
- ・二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●二次関数の値の変化やグラフの特徴について理解し、二次関数の最大値や最小値を求めている。 ●二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解している。 ●二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を二次関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1 ～ 2	●関数の値・一次関数	<ul style="list-style-type: none"> 関数について理解し、関数の値を求めることができる。 傾きと切片に着目して、一次関数のグラフを書くことができる。
3 ～ 9	●二次関数のグラフ	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数の式の変化をグラフの平行移動とみて考察することができる。 二次関数の軸と頂点を求め、グラフを書くことができる。 二次関数の値の変化をグラフから考察することができる。
10 ～ 12	●二次関数の最大値、最小値 (本時：第10時)	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数の最大値や最小値を求めることができる。 日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。
13 ～	●二次関数の決定	<ul style="list-style-type: none"> 与えられた条件から二次関数の式を求めることができる。 二次関数を決定する条件を自身で見いだすことができる。
16 ～ 17	●二次方程式の解、二次関数のグラフとx軸との共有点	<ul style="list-style-type: none"> 二次関数のグラフとx軸との共有点のx座標を求めることができる。 二次関数のグラフとx軸との共有点の個数や位置関係を二次関数と関連させて考察することができる。
18 ～ 21	●二次関数のグラフと二次不等式、二次不等式の解	<ul style="list-style-type: none"> 二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係について理解し、二次関数のグラフを用いて二次不等式の解を求めることができる。

(4) 学習の展開例

第10時に向けての家庭学習

◇学習活動	・指導上の留意点
◇前時までに学習した二次関数のグラフの問題を解き、ロイロノートの「提出箱」に提出する。	<div style="border: 1px dashed black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p><ロイロノートによる課題の提示> 次の二次関数のグラフをかけ。</p> <p>(1) $y = x^2 - 4x + 3$</p> <p>(2) $y = -2x^2 - 4x + 1$</p> </div>

第10時（二次関数の最大値、最小値）の展開例

◎学習の目標

- ・日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。（思考・判断・表現）

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
15分	<p>◇今回の授業の目的について理解する。</p> <p>●「今回の授業は、皆さんがまだ学習したことのない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるようになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょう。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。</p> <p>◇事前に提出した学習課題について、理解する。</p>		
<p><課題1> 二次関数のグラフはどのようにしてかくのか。</p>			
25分	<p>◇事前に提出した課題について、何が正しいか考察する。</p> <p>◇生徒に未習の学習内容である学習課題を知る。</p>		<p>・生徒の正答例と誤答例を提示し、何が正しいのか考察できるようにする。</p>
<p><課題2> 16cmの針金を使って、長方形を作り、面積が最大のときと、最小のときになるのは、横の長さが何cmだろうか。また、そのときの面積はどうなるだろうか。</p>			

◇4人1組の班を作り、実際にモールを使って、予想する。

●生徒の予想を聞く。

●そもそも、長方形ってどんな形だろうか。

●4つの角が等しい四角形である長方形にはどんな性質がありますか。

●長方形の辺が0や負の数になることはあるのかな。

●では、範囲を指定する必要がありますね。範囲を指定しながら、自分たちの予想が正しいか、数学的に解決しよう。

◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入ってある「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。

☆正方形のとき、最大値になりそう。

☆横の長さが1cmのとき、最小値になりそう。

☆横長、縦長の長方形？

☆正方形？

☆4つの角が等しい四角形

☆向かい合う辺は等しい。

☆ない。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。

<「マスめがね」による提示>

- ・長方形の面積はどのようにしたら求められるのかな。
- ・縦の長さ x と横の長さを x を使って表せないかな。

◇生徒は、学習の道しるべとしてループリックを活用する。

・ループリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。

<ループリック>

A	B	C	D
面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。さらに、面積が最小となるときについても考察することができた。	面積が最大のときの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。	面積が最大のときの横の長さを求められた。	面積が最大のときになる横の長さを求めようとした。

10分	<p>●できた生徒については、自身の解答をループリックを基に自己評価し、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出させる。</p> <p>◇本時の学習内容をまとめる。</p> <p>●どのように立式しましたか。</p> <p>●どのようにして面積の最大値を求めましたか。</p> <p>●面積の最小値についてはどんな考察をしましたか。</p> <p>●「今回の授業は、自分の力で関数の最大値、最小値の問題を解きました。これはすごいことです。君たちは関数のグラフをどのように活用するのかを見いだしたり、グラフの有用性を発見したりすることができました。この力は、今後の数学の世界を広げる際に役に立ちますし、社会でも自分の力で未知の問題を解決する力が求められています。今日はこんな力を身につけるための授業を行いました」と伝える。</p>		<ul style="list-style-type: none"> ・できた生徒に対しても、定義域について記述していない生徒がいれば、他者と協議が行えるように働きかける。 ・「立式」、「二次関数のグラフ」といった生徒が解答につながる発言や記述を取り上げ、生徒の発言を基に全体に共有する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>※思</p> <p>日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、自身で問題を解決する過程を通じて、未習の学習内容である二次関数の最大値・最小値の解法や二次関数のグラフの有用性を自身で見いだすことができる。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ロイロノートを活用して、生徒の記述内容を基に、生徒に解説させる。 ・モールや二次関数のグラフを使って、最小値がないことを生徒に示す。
-----	--	--	---

準備物

- ・ 1人1台端末・大型提示装置

二次関数（面積が最大のとくと最小のとくとを求めよう）

<課題1>

次の二次関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$
 (2) $y = -2x^2 - 4x + 1$

(1)

(2)

<課題2>

問題：16cmの針金を使って、長方形を作り、面積が最大のとくと、最小のときになるのは、横の長さが何cmだろうか。また、そのときの面積はどうなるだろうか。

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

A	B	C	D
面積が最大のとこの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。さらに、面積が最小となるときについても考察することができた。	面積が最大のとこの横の長さを求められた。また、そのときの面積を求められた。	面積が最大のとこになる横の長さを求められた。	面積が最大のとこになる横の長さを求めようとした。

・私の達成基準は（ ）です。

(5) 指導上の工夫について(第10時)

本授業の指導の工夫として、2点ある。1点目は、未習の学習内容に対して「見通しを立てる」数学的活動を充実させるために、日常生活や社会の事象にかかわる題材を基に、二次関数の最大値・最小値の学習課題を提示したことである。単に「数式から二次関数の最大値・最小値を求めよ」といった学習課題を生徒に提示しても、生徒はその学習課題に対して、「解決したい」と思える必要性を感じず、試行錯誤しながら見通しを立てようとする意欲が湧きにくいと考えられる。そこで、実際に針金(モール)を使って、生徒に「長方形の面積が最大になるのは横の長さが何cmだろうか」と実物を基に予想させることで、「自分の予想が正しいのか確認したい」と思えるような仕掛けをする。2点目は、今回の学習課題に対して、最小値を考察させた点である。教科書等に記載されている日常生活や社会の事象に関わる問題では、最大値もしくは最小値のいずれかしか解答しない。なぜなら、そのような問題においては定義域の両端の値が含まれないことが多いためである。今回の学習課題においては、最小値について問いかけることで、定義域の両端の値が含まれない場合、最小値はどのような解が得られるのかということ考察し、生徒が自身で見いだすことで、この単元における最大値・最小値についての理解だけでなく、数学の学習全般に通用する「開区間」「閉区間」の概念を獲得することにつながる。と考える。

3 授業の実際(第10時)

生徒は授業の冒頭で、「長方形の面積が最大になるとき、横の長さは何cmのときか」という学習課題について、モールを使って予想した。生徒は、実際にモールを使って予想する際に、「横の長さと縦の長さを足して2をかけると長方形の周りの長さになる」や「横をどんどん長くすると、面積はどのようになるのかな」といった数学的な表現や定義域についての考えなどを協議していた(図1)。また、「正方形は長方形ではないよね」という協議が行う生徒の姿も見られた。自身の予想をクラス全体に共有する際に、正方形のとき面積が最大となるといふ生徒の予想がでたときは、別の生徒から「横の長さが4cmにすると長方形ではなくなる」という声があった。これにより、生徒はそもそも長方形とはどのような図形なのか、自身の既習の学習内容を振り返ることにつながった(図2)。ここで、指導者が長方形とはどのような図形なのかを生徒に振り返らせることで、生徒は正方形が長方形の一部であることを理解することにつながった。その後、この学習課題を解決しようと、生徒は定義域を定めたり、具体的な数値を使って予想したりして、試行錯誤しながら見通しを立てようとしていた。生徒aは、学習課題に対して立式し、その式が二次関数であることから、これまでの学習内容に倣い、グラフをかいた。この生徒は、このグラフがどのような意味をもつか理解していなかったが、生徒同士の協議を進めることで、横の長さによって、面積が変化するという横の長さとの面積の関係を表すグラフであることを自身で見いだすことにつながった。また、生徒bは一次不等式で学習した不等式を表す数直線を用いた図を基に、まだ学習していない定義域の両端の値が含まれない



図1 モールを使って、学習課題について予想をする生徒の様子

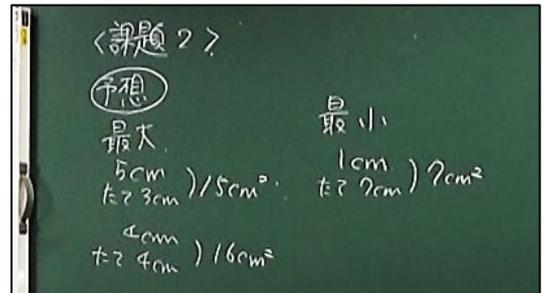


図2 生徒が予想した長方形の面積が最大となるとき横の長さを示した板書

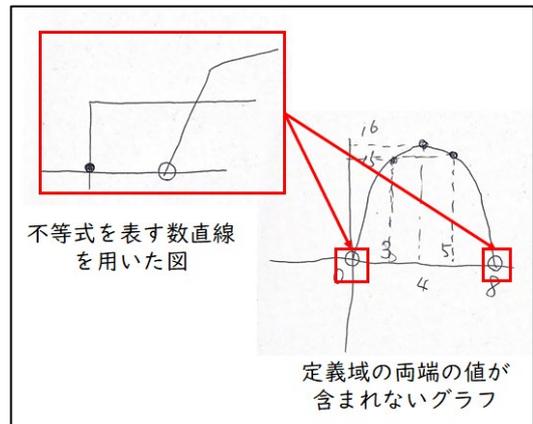


図3 定義域の両端の値が含まれない二次関数のグラフを見いだした生徒bの記述(囲み線、コメントは筆者)

二次関数のグラフを記述し、最小値がないことを自身で見いだした(図3)。さらに、最小値について、「 $0.00000\dots 1$ のように0にどんどん近づくが、最小の値を定めることはできないため、最小値はない」と答えた生徒cもいて、今までの学習では学んでいなかった「最小値がない」という新しい概念を自分なりの言葉で表現している様子が見られた(図4)。

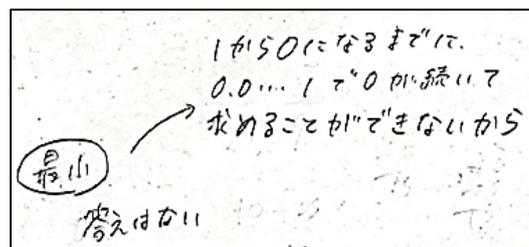


図4 最小値はないと解答した生徒cの記述

4 まとめ

(1) 成果

この数学的活動に取り組んだことにより、グラフの有用性に気付いたり、既習の学習内容と関連付けて、自身で新しい概念を獲得しようとしたりすることができ、生徒が自身で試行錯誤しながら学習課題に対して見通しを立てようと主体的に学習に取り組むことにつながった。生徒からは「もうこんな時間だ!」といった声があり、集中して授業に向き合うことができた。また、授業後にも本授業について協議している生徒の姿が見られたことから、未習の学習内容に対して試行錯誤しながら見通しを立てる数学的活動の充実につながったと考えられる。

(2) 課題点とその改善案

課題点は、本授業が1単位時間で終わることが困難であった点である。本授業で大切にしたい「グラフの有用性を感じる」ということについて、本来多くの時間を取りたかったのだが、本授業では、定義域を定めることや横の長さや縦の長さについて立式することに時間がかかったため、そこに時間がさけなかった生徒が一部いた。1単位時間で完結させるのならば、生徒の実態に応じて、指導者が伝えるところと、生徒に考察するところを丁寧に計画する必要がある。もしくは、2単位時間で設定し、生徒に考察する時間を多くとり、生徒自身で新しい概念を獲得する時間を設けることが挙げられる。