

【数学Ⅱ「対数を含む方程式・不等式」(数研出版 高等学校数学Ⅱ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅱ「対数を含む方程式・不等式」(数研出版 高等学校数学Ⅱ)を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基に[A]「問題を見いだす」数学的活動を行う。対数を含む方程式・不等式の問題は、log という初めて見る記号であることもあり、「底の条件がなぜ限定されているのか」や、「なぜ教科書に記載されている公式には対数同士の足し算や引き算はあるのに、掛け算や割り算はないのか」などといった疑問は本来感じやすい。しかし、疑問を感じる前に、指導者による解説を基に学習活動が進んでしまうことから、生徒自身で問いを生み出す機会が少ないと考えられる。また、解法パターンに当てはめて解答する生徒も多くみられる。そのようにして解に至る場合、対数についての本質的な理解が浅いと考えられる。そこで、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができるよう、「自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する」という学習課題を基に授業を構想した。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・対数の意味とその基本的な性質について理解し、簡単な対数の計算をすることができる。(知識及び技能)
- ・対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。(知識及び技能)
- ・指数と対数を相互に関連付けて考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・指数関数及び対数関数の式とグラフの関係について、多面的に考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●対数の意味とその基本的な性質について理解し、簡単な対数の計算をしている。 ●対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解している。 	<ul style="list-style-type: none"> ●指数と対数を相互に関連付けて考察している。 ●指数関数及び対数関数の式とグラフの関係について、多面的に考察している。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしていたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1	●対数の定義	・対数の意味とその基本的な性質について理解し、指数関数との関係を理解することができる。
2	●対数の性質	・対数の意味とその基本的な性質について理解し、対数の計算をすることができる。
3	●対数関数のグラフ	・対数関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。
4	●対数関数を含む方程式、不等式	・対数の定義や性質を正しく用いて、対数の方程式や不等式を解くことができる。
5	●常用対数の基本事項	・常用対数の有用性を理解し、常用対数表を用いて計算することができる。
6	●常用対数の応用	・対数の性質や常用対数表を適切に用いることができる。
7	●対数を含む方程式・不等式の問題の作成	・自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。

(4) 学習の展開例

第7時(対数を含む方程式・不等式の問題の作成)の展開例

◎学習の目標

- ・自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。(思考・判断・表現)

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
5分	<p>●数学の世界の拡張についてふれる。例：正の数から負の数。平方根の概念の獲得等。</p> <p>◇今回の授業の目的について理解する。</p> <p>●「この授業では、問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を見いだすことが目的である」ことを伝える。</p>		

12分

◇教科書p172例題6(1)を解く。

<課題1>方程式 $\log_2 x = 3$ を解け。

☆ $x = 8$

<課題2><課題1>を基に、問題を自身で作成しよう。

●問題は複数作成することを伝える。

◇生徒は、ロイロノートの「マスめがね」を使って、数学的な見方・考え方を働かせるようにする。

・意見交流を図りたい生徒のために教室内の移動を可とする。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるようロイロノートを通じて、「マスめがね」を生徒に提示する。

<「マスめがね」による提示>

- ・真数や底を様々な数値や文字に変更すると、この問題はどうなるかな。
- ・対数同士の和や差など考えると、この問題はどうなるかな。
- ・方程式を不等式にするとどうなるかな。

◇生徒は、学習の道しるべとしてループリックを活用する。

・ループリックを活用して、問題を作成する際の達成基準を示す。

<ループリック>

A	B	C	D
真数や底を変更したり、方程式を不等式にしたりして、その問題に取り組むことで、 <u>対数について理解が深まるような問題を自身で作成できた。</u>	真数や底を変更したり、方程式を不等式にしたりして、 <u>自身で問題を作成できた。</u>	問題を作成できた。	問題を作成しようとした。

☆真数を2乗にしたら、どうなるかな。
 ☆底の違う対数同士の和の問題を作ってみようかな。
 ☆底を文字にするとどうなるかな。

・問題を解決することが目的ではなく、『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問題を発見することが目的であることを再度指示する。

【改善案】

生徒が数学的な見方・考え方を働かせた問題を作成できるよう、指導者が対数を含む方程式・不等式の問題を作成した見本を示したり、授業において、生徒が作成した良問を授業の途中に取り上げたりすると、生徒が自身の数学的活動の方向性を確認できる。

20分	<p>◇生徒は自身が作成した問題を一つ選び、ロイロノートの「提出物」に提出する。</p> <p>◇班を作り、それぞれが作成した問題を解き合う。</p>		
<p><課題3>各自で見いだした問題をグループ内で解きあってみよう。</p>			
10分	<p>◇4人グループで問題を解き合う。 1題5分×4つ</p> <p>◇解答できたり見通しがもてたりした問題は、ロイロノートの「赤色のカード」にその問題を張り、ロイロノートで再提出する。解答できなかったり見通しがもてなかったりした問題は「青色のカード」にその問題を張り、ロイロノートに再提出する。</p> <p>◇指導者が取り上げた問題を解答する。(5分)</p>	<p>☆どうやって解くのだろうか。</p> <p>☆この問題の真数条件はどのようなになっているのかな。</p>	
<p><課題4>生徒が作成した問題について解答する(5分)</p>			
3分	<p>◇指導者による解説を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質についてまとめる。(5分)</p> <p>◇授業のまとめとして、今回の授業の成果と課題について話す。</p>		<p>・取り上げる問題については、真数条件や底の条件に関わる問題を取り上げる。</p> <p>例 真数に2乗や3乗を含んだ問題 底に文字がある問題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>※思</p> <p>自身で対数関数の方程式・不等式の問題を作成する取組を通じて、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる。</p> </div>

<p>●普通の授業から、与えられたものを単に受け入れるのではなく『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった見方・考え方を働かせることが大切であることを伝える。 例：常用対数表など</p>		
--	--	--

準備物

- ・ 1人1台端末・大型提示装置

相互評価シート

() さんの作成した問題を評価しよう

A	B	C	D
<p>真数や底を変更したり 方程式を不等式にしたりして、その問題に取り組むことで、対数関数について理解が深まるような問題を自身で作成できた。</p>	<p>真数や底を変更したり 方程式を不等式にしたりして、自身で問題を作成できた。</p>	<p>問題を作成できた。</p>	<p>問題を作成しようとした。</p>

<p>感想 ・ アドバイス</p>	
---------------------------	--

()年 ()組 ()番 氏名 ()

(5) 指導上の工夫について(第7時)

本授業の指導の工夫として、生徒が自身の問いを基に自由に条件を変更したり問題を拡張したりできるよう、問題を作成する際にあえて条件は定めなかった。対数を含む方程式・不等式の問題は、 \log という初めて見る記号であることから何に活用されているのかイメージしづらい。また、対数に関する条件について疑問を感じる前に解法パターンに当てはめることで解答することから、この学習内容についての理解が深まりにくい。そこで、「底を負にするとどうなるのか」や「真数を2乗にするとどうなるのか」といった自身の問いを基に自由に問題を作成し、対数に関して探究することをこの授業では重視した。一方で、生徒自身で対数を含む方程式・不等式の問題を作成しようとすると、高等学校数学の学習範囲では解答できない問題が生まれることが予想される。しかし、解答できる問題を作成することを目的にすると、自身の知識をより発展的にとらえることができず、この授業のねらいが達成できないと考える。なお、解答できない問題を作成したとしても「なぜ、解答できないのか」についてインターネット等を使って考察することで、対数に関する概念をより深く理解することにつながると考える。

3 授業の実際

授業では、生徒が自身の問いを基に対数を含む方程式・不等式の問題を記述した。生徒aは「底の数値を負の数にしてみよう(図1)」といった問題を作成した。教科書には底の条件を提示したうえで、学習を進めるような流れとなっているが、この取組により、「そもそも、なぜ底が負の数にすることが除外されているのか」について考察することにつながった様子が見られた。また、「対数同士の足し算、引き算の計算は教科書に記載されているのにも関わらず、掛け算、割り算はなぜないのか」と疑問をもち、自身のタブレット端末で調べる生徒bもいた(図2)。

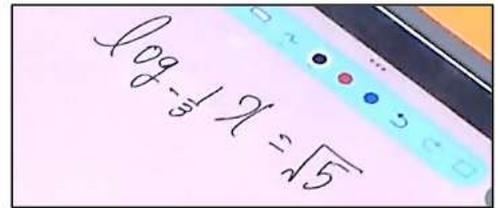


図1 底に負の数を入れた生徒aの記述

さらに、真数を分数にする生徒がいて、その問題を解決しようとする際に、「4分の3乗とはなにを表すのか」といった指数法則の振り返りにつなげている生徒cの姿も見られた。生徒dは、「真数が2乗になるとどうなるのか」といった問いを基に、他者と協議しながら「 $\log_2 x^2 = 4$ 」という問題を作成した。この問題については、授業の終盤に指導者からクラス全体に共有され、この問題の解答はどうなるのかについて発問した。この問題の解答について、多くの生徒が「4」と答える中、生徒eと生徒fがこの問題について協議しながら解答を導いた様子を図4に示す。この真数に2乗がついた問題は、「真数とは何なのか」など、対数についての理解が深まるものであった。



図2 対数同士の掛け算を調べている生徒bの端末画面

生徒が問題を作成した後、4人1組になって、それぞれで作成した問題を解き合ったり、評価し合ったりした際には、真数条件や底の条件について話している生徒gや、グラフを基に指数関



図3 真数に2乗つけた生徒の記述

数と対数関数を比較している生徒hの姿が見られた。

生徒の端末画面

生徒 f

生徒 e

生徒 e : 真数に2乗がついている。
 生徒 f : 真数ってそもそも何だったかな。真数は正ということしか分からない。
 生徒 e : この問題の真数は「x」なのかな。
 生徒 f : 「x」ではなく、「x²」で2乗も真数に含まれるよ。
 生徒 e : では、この問題の解にはマイナスも含まれるのかも。

図4 真数に2乗がついた方程式について協議している生徒の様子

4 まとめ

(1) 成果

生徒からは「先生から提示された問題を解答するような普通の授業と違って、問題を作成することに苦労したが、問題を解く時と違って、(真数や底の)条件を意識することができた」といった声があり、このような数学的活動により、真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができた。

(2) 課題点とその改善案

この授業の課題点は、生徒が対数を含む方程式・不等式の問題を単に複雑に作成したことである。例えば、図5のように底や真数にログを記述している生徒iがいた。その生徒になぜそのような問題を作成したか聞いたところ、「なんとなく難しそうだから」と答えた。「真数条件や底の条件、対数の性質について考察し、対数関数の理解を深めることができる」という本時の学習の目標に到達することを意識

図5 問題を作成した生徒iの記述(ロイロノートの画面)

した問題を作成してもらいたかったが、このように対数に関する本質的な理解が得にくい問題を作成している生徒が一部見られた。この改善案として、指導者が対数を含む方程式・不等式の問題を作成した見本を示したり、授業において、生徒が作成した良問を授業の途中に取り上げたりして、本時の学習の目標を達成できる指針を示すといったことが考えられる。