

【数学Ⅱ「三次関数の最大値・最小値」(数研出版 高等学校数学Ⅱ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅱ「三次関数の最大値・最小値」(数研出版 高等学校数学Ⅱ)を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対して[B]「見通しを立てる」数学的活動を行った。この授業では、極値や増減表等について学習していない生徒が「 $y = x^3 - 3x$ ($-1 \leq x \leq 2$)の最大値・最小値を求めよ」という学習課題に取り組んだ。この学習課題を設定した理由として、生徒にとって本質的な理解がしづらい導関数と微分係数を自身で意味を見いだしたり活用したりすることで、それらの本質的な理解を得たり、活用するよさを感じたりすることができると考えたためである。また、今後学習する極値や増減表といった学習内容に取り組む際にも、それらが導関数と微分係数の概念とつながっていることを実感できると考えたためである。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・微分係数や導関数の意味について理解し、関数の定数倍、和及び差の導関数を求めることができる。(知識及び技能)
- ・導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかく方法について理解することができる。(知識及び技能)
- ・関数とその導関数との関係について考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●微分係数や導関数の意味について理解し、関数の定数倍、和及び差の導関数を求めている。 ●導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかく方法について理解している。 	<ul style="list-style-type: none"> ●関数とその導関数との関係について考察している。 ●関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を数と式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしていたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善しようとしていたりしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1	●平均変化率と微分係数の定義	・平均変化率、微分係数についての定義を理解したり、解を求めたりすることができる。
2	●導関数	・微分係数の図形的な意味を考察し、導関数を求めることができる。
3	●種々の導関数の計算	・導関数を表す種々の記号を理解させ、適切に扱うことができる。
4	●関数の最大値と最小値 (1)	・未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。
5	●関数の最大値と最小値 (2)	・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ループリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を獲得することができる。 ・他者との協議や関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。
6	●接線の方程式	・微分係数が接線の傾きを表すことを理解することで、曲線の接線の方程式を求めることができる。
7	●増減表	・導関数を利用して、関数の増減を求めたり、導関数の符号が、グラフの増減を表していることを理解したりすることができる。
8	●極値とグラフ	・曲線の接線の傾きと関連して、関数の増加・減少と導関数の値の正負との関係を明らかにし、極大・極小値を調べて関数のグラフをかくことができる。
9	●極値のない3次関数のグラフ ●3次関数の決定	・ $f' = 0$ は、極値をもつための必要条件であるが、十分条件ではないことに気付くことができる。 ・極値をもつ条件から3次関数を決定することができる。
10	●関数の最大値と最小値 (3)	・増減表を定義域の範囲で記述したり、グラフをかいたりすることで、極値は局所的なもので、最大・最少は大域的なものであることを理解できる。
11	●3次方程式の実数解の個数	・方程式の解の個数とグラフとx軸の共有点の個数とが一致することを理解できる。
12	●不等式の証明	・条件の範囲で、増減表を用いて、最小値 >0 を示すことで、不等式の証明ができる。

(4) 学習の展開例

第4時に向けての家庭学習

◇学習活動	・指導上の留意点
<p>◇前時までに学習した「微分係数」と「導関数」について、定義や性質に記述し、ロイロノートの「提出箱」に提出する。</p>	<div style="border: 1px dashed black; border-radius: 15px; padding: 10px; background-color: #f9e79f;"> <p style="text-align: center;"><ロイロノートによる課題の提示></p> <div style="background-color: #f4cccc; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p>微分係数とは何か記述せよ。 また、微分係数を求めることで何が得られるのか答えよ。</p> </div> <div style="background-color: #fff2cc; padding: 5px;"> <p>導関数とは何か記述せよ。 また、導関数を求めることで何が得られるのか答えよ。</p> </div> </div>

第4時（関数の最大値と最小値(1)）の展開例

<p>◎学習の目標</p> <ul style="list-style-type: none"> ・未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。(思考・判断・表現)

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
10分	<p>◇今回の授業の目的について理解する。</p> <p>●「今回の授業は、君たちがまだ学習したことの知らない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるようになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょうか。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解</p>		

決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。

<課題1>微分係数、導関数とは何か考察せよ。

◇事前に提出した学習課題について、考察する。
●事前に提出してもらった課題について、生徒の正答例と誤答例を提示し、生徒に考察させる。

☆微分係数とは、グラフのある点に対して接線の傾きを示すのか。
☆導関数は、微分係数を一般的にした新しい関数なのか。

◇生徒に未習の学習内容である例題を解答する

<課題2>次の関数の最大値・最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 3x \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

◇生徒は、ロイロノートの「マスめがね」を使って、数学的な見方・考え方を働かせるようにする。

- ・課題にクラス全員が積極的に取り組めるように教室内の立ち歩きを可とする。
- ・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるようロイロノートを通じて、「マスめがね」を生徒に提示する。

<「マスめがね」による提示>

- ・2次関数の最大値・最小値を求めるためには、なにが必要だったのか。
- ・2次関数が「減少する」ときと、「増加する」ときでグラフの違いはなにがある。
- ・2次関数が「大きく減少する」ときと「小さく減少する」ときでグラフの違いはなにがある。

◇生徒は、学習の道しるべとしてループリックを活用する。

- ・ループリックを活用して、問題を解答する際の達成基準を示す。

<ループリック>

A	B	C	D
最大値・最小値を求める過程で <u>定理や性質を使って解き、そしてその定理や性質を使った根拠を示した。</u>	最大値・最小値を求める過程で、 <u>定理や性質を使って解いた。</u>	最大値・最小値を求める過程で、 <u>どの定理や性質を使うか理解しようとした。</u>	最大値・最小値を求めようとした。

35分

	<p>●机間巡視しながら、生徒の記述や考察の様子を確認し、「微分係数」についての記述が出てきた際、全体に共有する。</p> <p>◇できた生徒は、ロイロノートの「提出物」に解答を提出する。</p>	<p>☆2次関数の最大値、最小値では、定義域の端点だけでなく、頂点も候補になった。</p> <p>☆減少するときは、右下がり、増加するときは、右上がりになる。</p> <p>☆関数が大きく減少するときと小さく減少するときでグラフの曲線に対する接線の傾きが異なる。</p>	<p>・共有する際には、生徒に一度手を止めるよう伝え、注目させる。</p> <div data-bbox="976 259 1417 622" style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>【改善案①】 共有について、頻繁に行ったり問題の解決に直結するような発問をしたりすると生徒の活動が受動的になる恐れがあるため、生徒の実態に応じて調整する必要がある。</p> </div>
	<p><生徒の解答の例></p> $y = x^3 - 3x \quad (-1 \leq x \leq 2)$ $y' = 3x^2 - 3$ <p>$y' = 3x^2 - 3 > 0$ のとき、その関数は増加する</p> <p>$y' = 3x^2 - 3 < 0$ のとき、その関数は減少する</p> <p>$y' = 3x^2 - 3 = 0$ のとき、その関数は一定である</p> <p>これにより、y' の正負にしたがって、グラフをかくとグラフの概形がかける</p>		<p>グラフの概形をかくためには、グラフに対する接線の傾きを求める必要がある。なぜなら、関数が減少(増加)するとき、グラフに対する接線の傾きは負(正)の数になるということがわかるためである。</p> <p>グラフに対する接線の傾きを求めるためには、微分係数を求める必要があり、微分係数を求めるためには、導関数を求める必要がある。</p>
<p>3分</p>	<p>◇次回の授業について把握する。</p> <p>●次回の授業では、ルーブリックを活用して、相互評価をする。また、類題を解いて、その考え方がほかの問題でも活用できるのか理解する。</p>		<p>・できた生徒に対しても、導関数や微分係数の意味について記述していない生徒がいれば、他者と協議が行えるように働きかける。</p> <div data-bbox="965 1507 1406 1821" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>※思 未習の学習内容である関数の最大値・最小値を題材にして、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。</p> </div>

準備物

- ・1人1台端末・大型提示装置

第5時（関数の最大値と最小値(2)）の展開例

◎学習の目標

- ・生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を獲得することができる。(主体的に学習に取り組む態度)
- ・関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。(思考・判断・表現)

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
10分	◇ルーブリックを基に、前回の授業で記述した解答を相互評価する。		
<p><課題1>各自で記述した解答をグループ内で相互評価しよう。</p>			
5分	<p>◇4人グループで活動を行う。1人1分×4回</p> <p>◇発表を聞いた3人は、ルーブリックを基にした評価を理由とともに発表者に伝え、ロイロノートの「送る」機能を活用して、発表者に相互評価シートを提出する。</p> <p>●指導者は、生徒の記述を基に、「微分係数」と「導関数」をどのように活用して、三次関数の最大値・最小値を求めたのか、生徒に発問する。</p>		<p>・解答できなかった生徒は、どのように解くのか聞く。</p> <p>・ルーブリックと照らし合わせて改善点などを発表者に伝える。</p> <p>・評価の根拠を具体的な理由とともに述べるように指示する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; background-color: #e0e0e0;"> <p>※態</p> <p>生徒自身で作成した問題を互いに解きあったり、ルーブリックを基に総合評価したりすることで、自分にはなかった視点を獲得することができる。</p> </div>
20分	◇関連する類題を解く。		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; background-color: #ffff00;"> <p>【改善案②】</p> <p><課題2>(2)については、極値のない問題であることから、生徒の実態に応じて、前時の微分係数と導関数の性質について振り返りながら進める必要がある。</p> </div>
<p><課題2>以下の関数の最大値・最小値を求めよ。</p> <p>(1) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ ($-1 \leq x \leq 3$)</p> <p>(2) $y = x^3 + 2x$ ($-1 \leq x \leq 3$)</p>			

<p>12分</p> <p>3分</p>	<p>◇できた生徒は、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。</p> <p>◇提出した生徒は発表する。</p> <p>◇授業のまとめを把握する。</p> <p>●「今回の授業は、君たちがまだ見たことのない未知の問題を解決する学習活動を行いました。この力は大学入試にもかかわってきます。そして、社会においても必要な力です。今回の授業では、その未知の問題にアプローチする体験をしてもらいました」と伝える。</p>	<p>☆先ほどと同じように問題が解けるかな。</p> <p>☆(1)は解けるけれども、(2)は解けない。</p> <p>☆もう一度、微分係数の意味やグラフの接線の傾きについて、理解する必要がある。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>※ 関連する類題に取り組むことで、微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることができる。</p> </div> <p>・ロイロノートの提出物を「画面共有」機能を活用して、クラス全体に共有し、生徒の発言をその提出物に指導者が記述しながら、＜課題2＞のまとめを行う。</p>
----------------------	--	--	--

準備物

- ・ 1人1台端末・大型提示装置

相互評価シート

() さんの解答を評価しよう

A	B	C	D
<p>最大値・最小値を求める過程で<u>定理や性質</u>を使って<u>解き</u>、そしてその<u>定理や性質</u>を使った根拠を示した。</p>	<p>最大値・最小値を求める過程で、<u>定理や性質</u>を使って<u>解いた</u>。</p>	<p>最大値・最小値を求める過程で、<u>どの定理や性質</u>を使うか<u>理解しよう</u>とした。</p>	<p>最大値・最小値を求めようとした。</p>

<p>感想 ・ アドバイス</p>	
---------------------------	--

()年 ()組 ()番 氏名 ()

微分法（未習の学習内容について既習の知識を活用して解こう）

<課題1>

微分係数とは何か記述せよ。

導関数とは何か記述せよ。

<課題2>

問題：次の関数の最大値・最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 3x \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

ルーブリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

A	B	C	D
最大値・最小値を求める過程で <u>定理や性質を使って解き、そしてその定理や性質を使った根拠を示した。</u>	最大値・最小値を求める過程で、 <u>定理や性質を使って解いた。</u>	最大値・最小値を求める過程で、 <u>どの定理や性質を使うか理解しようとした。</u>	最大値・最小値を求めようとした。

・私の達成基準は（ ）です。

<課題3> 以下の関数の最大値・最小値を求めよ。

問題(1) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ ($-1 \leq x \leq 3$)

問題(2) $y = x^3 + 2x$ ($-1 \leq x \leq 3$)

(5) 指導上の工夫について(第4時、第5時)

本授業の指導の工夫として、3点ある。1点目は増減表や極値を学習せずに、三次関数の最大値・最小値の学習課題に取り組んだ点である。「 $y = x^3 - 3x$ ($-1 \leq x \leq 2$)の最大値・最小値を求めよ」という学習課題については、教科書の流れに沿って授業を行うと、「増減表を使って、グラフをかけば最大値・最小値が求められる」というこの問題の解法を学ぶことになる。一方で、本研究で行った授業では、生徒が導関数と微分係数までしか学習していないことから、「グラフが増加するときとはどのような状態なのか」や「微分係数と導関数とはそもそもどのようなものなのか」という本質的なことを考え、三次関数の最大値・最小値の解法等を自身で見いだすことをねらいとする。2点目は、導関数・微分係数の定義や性質についての家庭学習を設定したことである。本時の学習課題に取り組むことができるようにするためには、「そもそも導関数・微分係数とは何なのか」や、「これらを活用するとどのような有用性が得られるのか」について把握することが大切であると考えられる。3点目は、授業における生徒の記述や発言をクラス全体に共有する場面を設定したことである。本時に提示する学習課題について、生徒によってはなかなか解決するための見通しが立てられない生徒もいると予想されると考える。そこで、例えば「微分係数を使うと、グラフの接線の傾きが分かる」ことや、「グラフの増減を把握するためには、接線の傾きの正負を判断することが必要だ」など、生徒の記述や発言を全体に共有する場面を設定することで、見通しを立てられない生徒も安心して数学的活動に取り組むことができると考える。

3 授業の実際(第4時、第5時)

生徒は「三次関数の最大値・最小値」について、今まで学習した二次関数の知識で解けないか式を変形したり、適当な数値を代入して、最大値・最小値を求めようとしたりと試行錯誤しながら取り組んだ。試行錯誤しながら学習を進めていく際に、家庭学習で行った微分係数と導関数の定義や性質に注目する生徒aの様子が見られた。この生徒は、グラフが増加するときと減少するときで接線の傾きがどのように変化をするのかについて注目していた。そして、実際に自身で書いた適当な曲線に対して、傾きが正や負となるような複数の接線を記述した。この記述により、接線の傾きが正(負)のとき、そのグラフは増加(減少)すると考察した(図1)。これにより、微分係数により接線の傾きが求められるという既習の学習内容を活用し、微分係数の正負を把握することで、グラフの概形がかけられることを自身で見いだすことができた。また、他者との交流を通して、導関数のグラフの概形に注目すると、微分係数の正負を把握することができるという

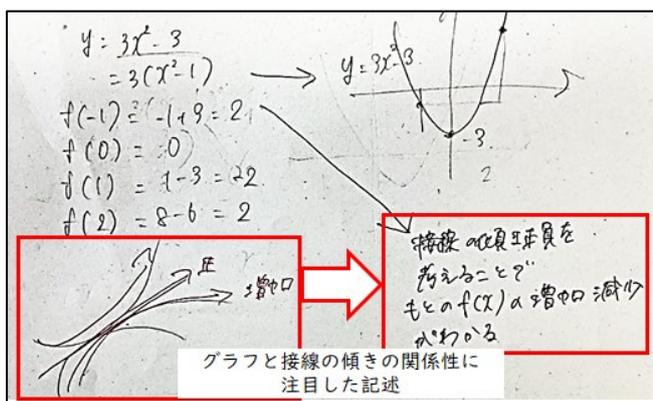


図1 グラフと接線の傾きの関係性に注目している生徒aの記述(囲み線、コメントは筆者)

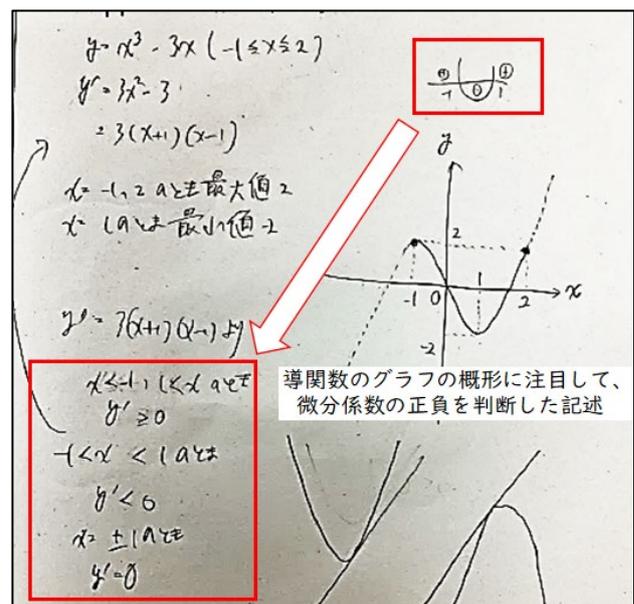


図2 導関数のグラフの概形に注目して、元の関数の増減を判断している生徒bの記述(囲み線、コメントは筆者)

った、二次不等式で学習した解法を基に、三次関数のグラフの概形を求めている生徒もいた(図2)。このように増減表を用いずに、微分係数と導関数の定義や性質を活用してグラフを記述し、三次関数の最大値・最小値を求めることができた生徒が多数見られた。また、他者との協議を通して、接線の傾きが0のときはそのグラフは増加も減少もしない点であることに気付いた生徒の様子を以下に示す(図3)。

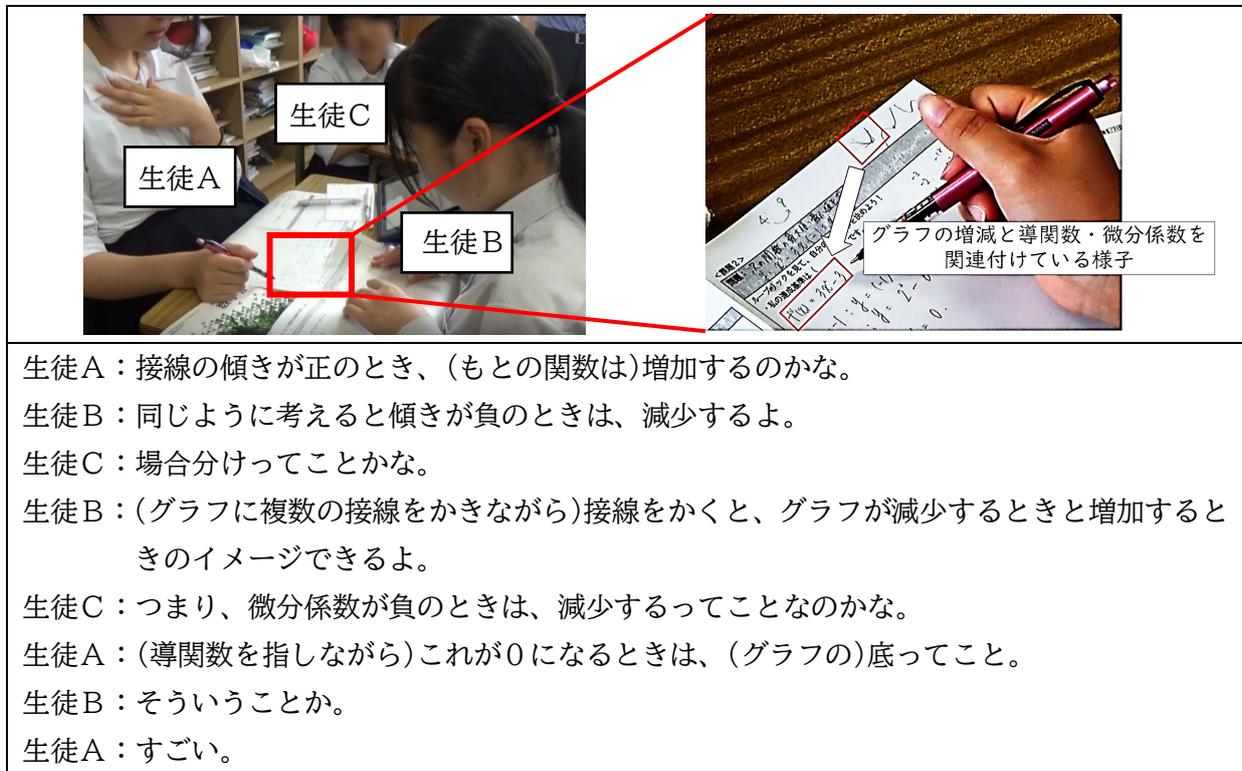


図3 三次関数のグラフの増減について、導関数と微分係数を基に協議する生徒の様子

4 まとめ

(1) 成果

生徒は第4時の授業で獲得した概念や解法を基に、三次関数の最大値・最小値に関わる類題に取り組み、それらが他の問題にも活用できるのか確認した。このような数学的活動を通じて、生徒は微分係数や導関数の理解を深めたり、活用するよさを感じたりすることにでき、生徒自身で数学における新たな概念、原理や法則などを見いだしたり学んだりすることにつながった。

(2) 課題点とその改善案

課題点は2点ある。1点目は、クラス全体で共有するための手立てについてである。指導者が生徒の進捗状況に不安を感じて、頻繁に問題を解決するための手立てを共有しすぎると、指導者による解決するための指針を聞くことを意識してしまい、自身で試行錯誤しながら見通しを立てることをやめてしまう生徒が一部いた。「問題を解決するための指針をどの程度共有するのか」や「授業のどの時間で共有するのか」など、生徒の実態に応じて丁寧に授業を計画する必要がある。

2点目は、第5時における「<課題2>(2) $y = x^3 + 2x$ ($-1 \leq x \leq 3$)の最大値・最小値を求めよ」という極値のない学習課題についてどのように考察させるかについてである。生徒は、第4時に獲得した概念や解法を基にこの学習課題に取り組んだが、なかなか解くことができなかった。これは、第4時において、「微分係数が0のとき、もとの関数の増減が変わる」ことを意識してしま

ったことが原因であると考えられる。改善案としては、「微分係数が正のときと負のときで、もとのグラフがどのような状態にあるのか」や、「グラフが大きく増加するときと小さく増加するときでどのような違いがあるか」などを考察させることで、生徒はその課題を通じて、自身が獲得した概念や解法を見直すことができると考える。