

【数学Ⅲ「逆関数・合成関数」(数研出版 高等学校数学Ⅲ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅲ「逆関数・合成関数」を題材にして、既習の学習内容である学習課題を基に[A]「問題を見いだす」数学的活動を行った。生徒は、この授業までに「逆関数・合成関数」の学習を一通り終えている状態である。この時期に学習する「逆関数・合成関数」においては、教科書等に記載されている単純な関数のみを取り扱っていることや、その後の学習でよく活用され、汎用性の高い内容にもかかわらず、定義や性質について生徒が理解しづらい学習内容である。そこで、値域と定義域の関係性といった合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができたり、これから学習していく未知の関数について対応できたりするよう「今まで学習してきた関数を使って合成関数を求めよ。加えて、その求めた合成関数の逆関数を求めよ」という学習課題を設定し、授業を構想した。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・簡単な分数関数と無理関数の値の変化やグラフの特徴について理解することができる。(知識及び技能)
- ・合成関数や逆関数の意味を理解し、簡単な場合についてそれらを求めることができる。(知識及び技能)
- ・分数不等式、無理不等式を解くことができる。(知識及び技能)
- ・既に学習した関数の性質と関連付けて、簡単な分数関数と無理関数のグラフの特徴を多面的に考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・自身で種々の逆関数や合成関数を求めることができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●簡単な分数関数と無理関数の値の変化やグラフの特徴について理解している。 ●合成関数や逆関数の意味を理解し、簡単な場合についてそれらを求めている。 ●分数不等式、無理不等式を解いている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●既に学習した関数の性質と関連付けて、簡単な分数関数と無理関数のグラフの特徴を多面的に考察している。 ●合成関数や逆関数の定義を理解し、自身で種々の逆関数や合成関数を求めている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1	●分数関数のグラフ	・分数関数のグラフを描くことができる。 ・分数関数の定義域・値域を求めることができる。
2	●分数関数のグラフと直線の共有点 ●分数不等式	・共有点を求めることができる。 ・不等式を解くことができる。
3	●無理関数のグラフ	・無理関数のグラフを描くことができる。
4	●無理関数のグラフと直線の共有点 ●無理不等式	・共有点を求めることができる。 ・不等式を解くことができる。
5	●逆関数	・逆関数の定義を理解し、様々な関数の逆関数を求めることができる。 ・逆関数の定義域・値域や性質を求めることができる。
6	●合成関数	・合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。
7	●自身で種々の逆関数や合成関数を求める	・種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。

(4) 学習の展開例

第6時に向けての家庭学習

◇学習活動	・指導上の留意点
◇第6時に行うジグソー学習に向けて、課題A、課題B、課題Cにおいて、生徒はそれぞれ割り振られた課題に取り組む。	
課題A：ある2つの関数が合成関数をつくることのできる場合、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを理解する。 例として、 $f(x)=x+1$ $g(x)=\frac{1}{x}$ において、 $f(g(x))$ 、 $g(f(x))$ はそれぞれつくることができるかどうかを考える。	
課題B：ある関数に逆関数が存在する場合、その関数と逆関数の合成関数は x になることを理解する。例として、 $f(x)=2x+1$ 、 $g(x)=\frac{x-1}{2}$ について、 $f(g(x))$ 、 $g(f(x))$ をそれぞれ求める。	
課題C：ある関数に逆関数が存在する場合、その関数と逆関数のグラフを見て、互いのグラフの位置関係を確認する。例として、 $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2$ を活用して考える。	
◇課題を解き、ロイロノートの「提出箱」に提出する。	

第6時（合成関数）の展開例

◎学習の目標

・合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。（思考・判断・表現）

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
15分	◇今回の授業の目的と流れについて理解する。 ●「今回の授業は、合成関数について学びます。ただし、この授業では、3人ずつのグループを作り、3人の力を組み合わせて課題を解決する学習活動を行います。具体的には、授業前半で、課題A、B、Cの同じ課題を行ったグループで集まり、課題についての考えをより深める時間をとります。次に、それぞれの課題A、B、Cについて、異なる知識をもった人たちが再度3人ずつのグループを構成し、3つの知識を統合させて課題を解決していく活動を行います。3人の知識が全て異なるため、それぞれの生徒が必ず発言し、問題解決に向かって進めるようにしましょう」と伝える。		
	<p><課題1>それぞれに割り振られた課題についてグループで考察する。</p>		
20分	<p><課題2>エキスパートA、B、Cで学習した内容をお互いに教えあう。その後、$f(x)=2^x$、$g(x)=\log_2 x$の2つの関数について合成関数を求め、この二つの関数がどのような関係なのか説明する。</p>		
15分	◇授業のまとめをする。 ●生徒の記述を基に、合成関数の性質や定義域についての理解、もとの関数と逆関数の位置関係		・もとの関数と逆関数との同値性や関数における一対一対応(円の方程式等)についてふれる。

<p>等、生徒に発問し、学習のまとめを行う。</p> <p>◇次の授業について理解する。</p>		<p>※思</p> <p>合成関数の定義や性質について学び、それらを使って考察することができる。</p>
--	--	---

準備物

- ・1人1台端末・大型提示装置

第7時に向けての家庭学習

◇学習活動	・指導上の留意点
<p>◇課題をロイロノートの「提出箱」に提出する。</p> <p><家庭課題1>：これまでに学んだ関数をかけ。ただし、三角関数は除く。</p> <p><家庭課題2><家庭課題1>で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよ。また、その関数を定義域と値域を求めよ。ただし、三角関数は除く。</p>	<p>・関数の式については、シンプルな形で記述するように伝える。</p>

第7時（自身で種々の逆関数や合成関数を求める）の展開例

<p>◎学習の目標</p> <ul style="list-style-type: none"> ・種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。（思考・判断・表現）

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
10分	<p>◇今回の授業の目的について理解する。</p> <p>●「今回は、今まで学習してきた関数を使って、自分たちで合成関数や逆関数を求めてもらいます。この時間は、単に先生から与えられた問題を解くのではなく、自分たちで問題を設定して、それを解くことを重視しています。この問題を設定してその問題を解く力は、これらの社会で求められている力です。今日はその力を身につ</p>		

30分	けてもらうための授業です。」ことを伝える。									
	<家庭課題1><家庭課題2>の内容について考察する。									
	●数学Ⅲで学習した分数関数や無理関数についてふれる。		・関数の式については、シンプルな形で記述するように伝える。 ・ロイロノートの「画面共有」を活用し、生徒がほかの生徒の考えを把握できるようにする							
	◇家庭学習を踏まえて、合成関数と逆関数を求める。									
	<課題3>いろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよ。 また、その関数を定義域と値域を求めよ。									
	<課題4>求めた合成関数の逆関数を求めよ。 また、そのときの関数の定義域と値域を求めよ。									
●指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。										
<「マスめがね」による提示> ・関数を組み合わせて合成関数を求める際には、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要がある。 ・逆関数を求める際には、もとの関数とその逆関数では、定義域と値域がどのような関係になっているのかな。 ・逆関数を求めた際に、もとの関数とのグラフの位置関係はどうなっていたかな。										
◇生徒は、学習の道しるべとしてループリックを活用する。										
<ループリック> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">A</th> <th style="padding: 5px;">B</th> <th style="padding: 5px;">C</th> <th style="padding: 5px;">D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ求めることができた。</td> <td style="padding: 5px;">合成関数と逆関数を求めることができた。</td> <td style="padding: 5px;">合成関数を求めることができた。</td> <td style="padding: 5px;">合成関数を求めようとした。</td> </tr> </tbody> </table>			A	B	C	D	定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ求めることができた。	合成関数と逆関数を求めることができた。	合成関数を求めることができた。	合成関数を求めようとした。
A	B	C	D							
定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ求めることができた。	合成関数と逆関数を求めることができた。	合成関数を求めることができた。	合成関数を求めようとした。							
◇できた生徒は、「<課題3>、<課題4>、『関数ソフトで示した合成関数と逆関数のグラフ』」			・必要に応じて、関数ソフトを使って、求めた合成関数と逆関数の位置関係を確認する。							

10分	<p>についてループリックを基に自己評価する。また、これら三つをロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。</p> <p>◇グループを作り、自身で求めた合成関数、逆関数、それらのグラフを共有し、どのようにしてこれらを求めたのか話し合う。</p> <p>◇授業のまとめをする。</p> <p>◇<振り返り>を記述し、この取組により何を学んだのか記述する。</p> <p>●合成関数と逆関数について、生徒の提出した内容や振り返りの記述を基に、解説する。</p> <p>●「今日は、自分たちで設定した関数を基に合成関数や逆関数を求めてもらいました。普段の授業でも『この問題のこの部分を変更したらどうなるかな』や『この問題はこんな見方ができるのではないか』といった問いをもちながら取り組んでください」と伝える。</p>	<p>☆一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要性が感じられた。</p> <p>☆どんな関数でも逆関数のグラフとの位置関係は直線$y=x$に関して対称になることがわかった。</p>	<div data-bbox="947 190 1376 488" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>※思 種々の逆関数や合成関数を自身で求めることを通じて、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることができる。</p> </div> <p>・教科書に記載されていない合成関数や逆関数の定義域についてふれられている内容や、合成関数と逆関数との位置関係を見る。特に、合成関数を求める際に、一方の関数の値域が一方の関数の定義域に含まれていることを確認する必要があること。逆関数を求める際には、定義域と値域が元の関数と逆になっていること。もとの関数と逆関数とのグラフの位置関係が直線$y=x$に関して対称になることについてふれていることについて、おさえる。</p>
<p>準備物</p> <p>・1人1台端末・大型提示装置</p>	<p>【改善案】 授業のまとめに「今回除いた三角関数について、逆関数は存在するのか考えよ」という学習課題を生徒に考えさせると、今回の学習内容について確認できる。</p>		

令和6年度 数学科教育に関する研究

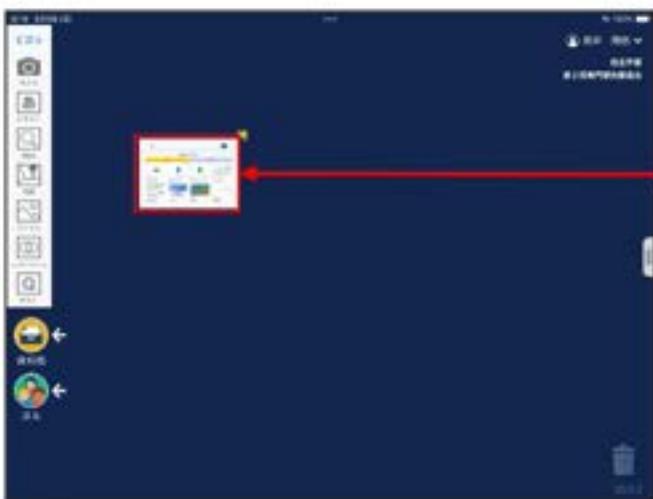
GeoGebra(バージョン31) 使用手順

ロイロノートで
関数ソフトを使ってみよう！





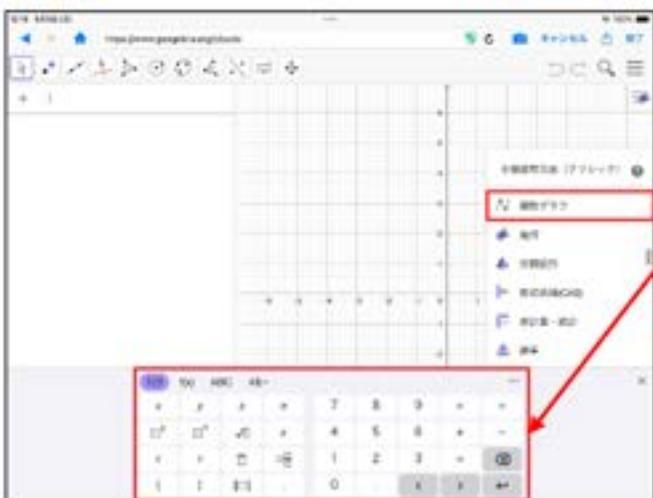
① 「Web」 をクリックする



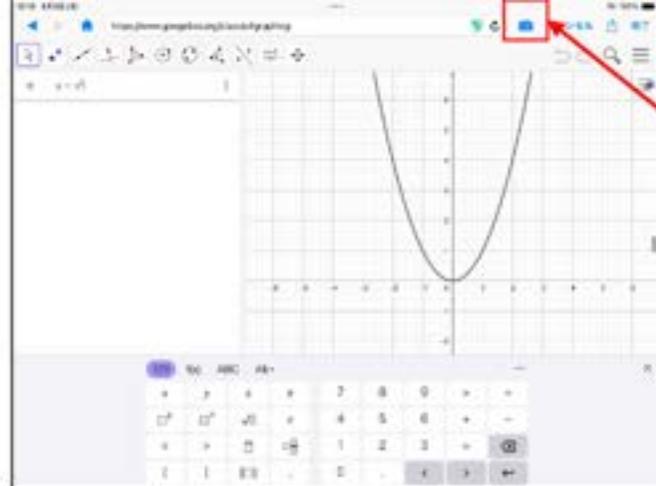
② 出てきたカードをクリックする



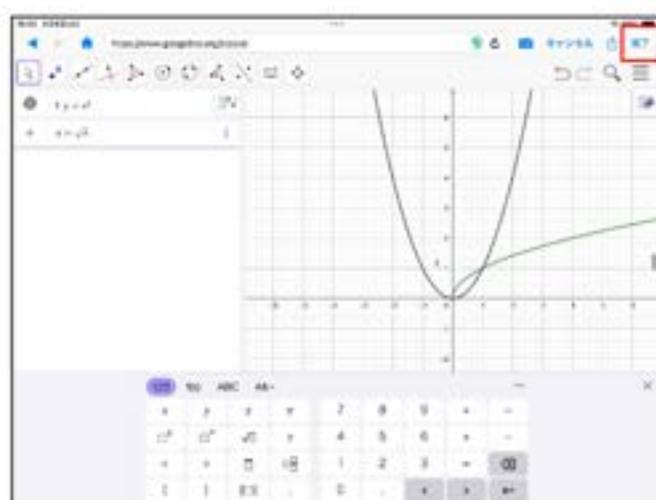
③ 「GeoGebra」 をクリックする



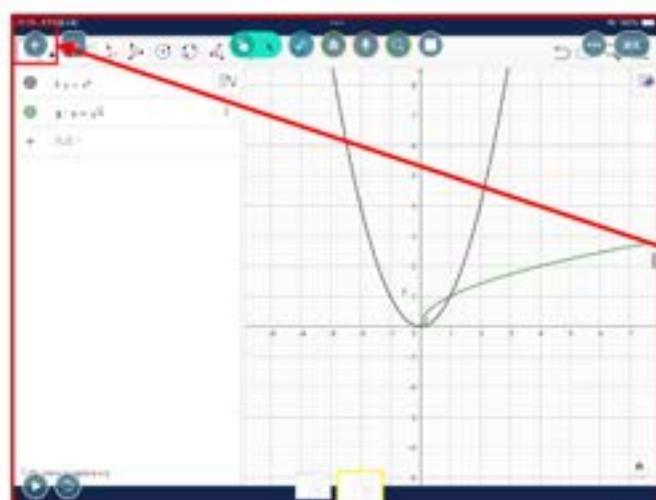
④ 「関数グラフ」 をクリックし、関数を入力する



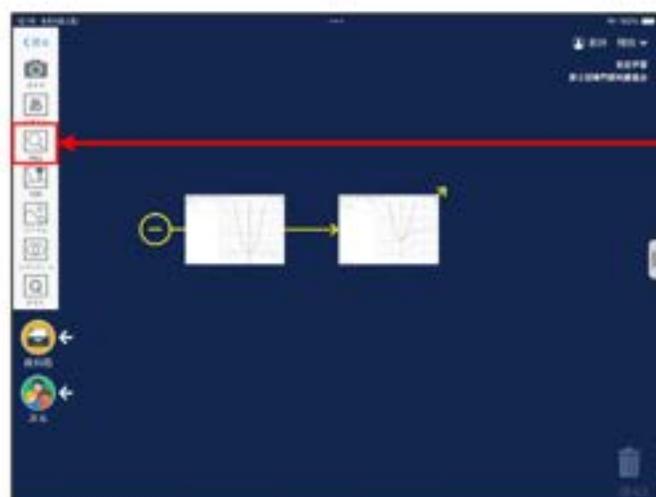
⑤ カメラをクリックすると、その画面のカードが生成される



⑥ 「完了」をクリックすると、その画面のカードが生成され、GeoGebraの閲覧が終了する



⑦ ⑥の状態のカードの画面になる「←」をクリックする



⑧ 引き続き、GeoGebraを活用する際には、①～⑦と同様に行う

合成関数と逆関数（合成関数と逆関数の性質について）

<課題1>

割り振られた課題について理解を深めよう

・私が割り振られた課題は（ ）です。

<課題2>

問題：ほかの割り振られた課題について教えてもらおう。また、自身で学んだこと、教えてもらったことを基に、 $f(x)=2^x$ 、 $g(x)=\log_2 x$ の2つの関数について合成関数を求め、この二つの関数がどのような関係なのか記述しよう。

合成関数と逆関数（自分で逆関数・合成関数を求めよう）

<家庭課題1>

これまで学んだ関数をかこう。ただし、三角関数は除く。	
例 $y = x^2 + 1$	

<家庭課題2>

<家庭課題1>で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよう。また、その関数を定義域と値域を求めよう。ただし、三角関数は除く。

$f(x) =$

$g(x) =$

$f \circ g(x) =$

合成関数と逆関数（自分で逆関数・合成関数を求めよう）

<課題3>

<家庭課題1>で記述したいろいろな関数を組み合わせて、合成関数を求めよう。また、その関数を定義域と値域を求めよう。ただし、三角関数は除く。

$f(x) =$

$g(x) =$

$f \circ g(x) =$

<課題4>

求めた合成関数の逆関数を求めよう。また、そのときの関数の定義域と値域を求めよう。

ループリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

A	B	C	D
定義域と値域を定めた合成関数と逆関数をそれぞれ作成することができた。	合成関数と逆関数を作成することができた。	合成関数を作成することができた。	合成関数を作成しようとした。

・私の達成基準は（ ）です。

<振り返り>

この取組により、逆関数と合成関数についてどのようなことを学びましたか。

(5) 指導上の工夫について(第6時、第7時)

第7時で実施する「既習の学習内容を基に『問題を見いだす』数学的活動」を充実させるためには、既習の学習内容の定着が必要である。そこで、第6時において、「ジグソー学習」を取り入れて、逆関数・合成関数についての理解を深める機会を設定する。この「ジグソー学習」では、各生徒が保有する知識がエキスパートA、B、Cの内容に分かれているため、エキスパートA、B、Cを担当する生徒がそれぞれグループになった際に、各生徒が「質問に答えられるのは自分だけ」という責任感を持つことにつながる。さらに、グループ作成後の学習課題については、グループ内で各エキスパートの知識が必要になるよう作成したことから、それぞれのエキスパートで得た知識を結びつけることにもつながり、逆関数・合成関数の理解を深めることができると考える。この学習で得た知識を基に第7時をより充実させるようにする。

第7時における指導上の工夫としては2点ある。1点目は、逆関数・合成関数を求める際に、これまでに学んだ関数をかくことを家庭学習に取り入れたことである。組み合わせる基となる関数を記述する段階を家庭学習で踏まえることにより、生徒がどのように逆関数・合成関数を求めればよいのかスムーズに数学的活動が行えると考える。また、逆関数・合成関数を求める際に組み合わせる関数については、シンプルな関数を選択することを意識させることを生徒に伝えている。単に複雑な関数を組み合わせようとすると、定義域や値域を把握したり、逆関数にすることが困難になったりするため、本授業の目標である、合成関数や逆関数の定義や性質を理解するという部分に到達しづらい。そのため、本授業では組み合わせる関数についてはシンプルな関数にするよう伝える。2点目は、逆関数・合成関数を求める際に、関数ソフトGeoGebra(以下、GeoGebraという。)を活用する点である。GeoGebraとは、幾何学、代数学、表計算、グラフ作成、統計学、微積分を一つにまとめた、無料で利用できる教育用の動的な数学ソフトウェアである。この関数ソフトはロイロノートの「Web」機能からスムーズに活用できるため、本授業を進めるうえで非常に使いやすい。このソフトを活用することで、生徒が合成関数から逆関数を求める際に、立式や定義域、値域が正しいのか把握したり、合成関数とその逆関数のグラフの位置関係を理解したりすることの一助となる。また、生徒の考えをクラス全体に共有する際にも、グラフという視覚的な要素により、合成関数と逆関数の関係を視覚的に理解することができる。

3 授業の実際(第6時、第7時)

第6時において、授業の冒頭に生徒は、「逆関数・合成関数」に関する三つの学習課題A、B、Cのうち一つが割り振られ、その割り振られた学習課題が同じグループを作り、その学習課題について理解を深める学習活動を行った。その後、学習課題A、B、Cにおいて、割り振られた学習課題がそれぞれ異なるグループを作り、それぞれの知識を活用して解答できるように共通の学習課題に取り組んだ。

この場面では、ロイロノートを使って自身の記述内容を基に伝えたり、GeoGebraを使ってもとの関数と逆関数の関係を表現したりして、逆関数と合成関数について数学的な表現をする生徒の姿が見られた



図1 1人1台端末を活用して、自身の記述内容を表現している生徒の様子

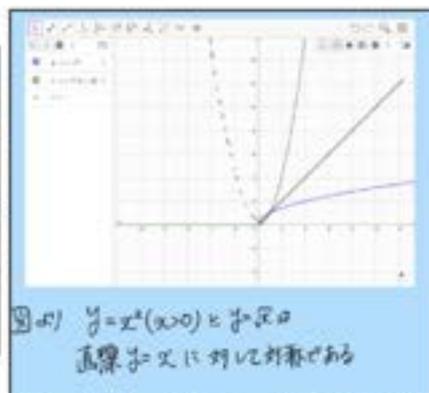


図2 GeoGebra を使って、もとの関数と逆関数の関係を表現している生徒aの記述

(図1)(図2)。本時の授業により、生徒は逆関数・合成関数の定義や性質について理解を深めることにつながった。

第7時において、生徒は、前時の学習課題の解決過程を振り返る際に「どのような関数においても合成関数や逆関数を求めることができるのか」という問いから「今まで学習してきた関数を使って合成関数を求めよ。加えて、その求めた合成関数の逆関数を求めよ」という学習課題に取り組んだ。生徒は、自身で設定した関数を基に合成関数を求め、そして、その逆関数を求めた。ここでは、前時に学習した逆関数・合成関数の定義や性質を活用したり、関数ソフトを活用してグラフで表現したりして、未知の関数について立式や定義域、値域が正しいのか考察した。例えば、図3のような生徒dの記述が見られた。この生徒が組み合わせた関数については、定義域や値域について深く考察するもので、合成関数や逆関数について理解を深めるものであった。また、組み合わせる前の式はシンプルな関数であるが、合成関数や逆関数にすると、生徒が今まで見たこともない関数が作成されている。このような関数について、生徒自身でその立式が正しいのかについて、指導者が確認するのではなく、関数ソフトを使って、その解決過程が正しいのかを確認した。生徒cは合成関数とその求めた逆関数を掛けると、 x になるという性質を基に、自身の解答が正しいか確認していた。また、生徒dは生徒同士で自身の求めた関数について協議する際に「逆関数を求めた際、もとの関数とのグラフの位置関係はどうなっていたかな」と示された「マスメガね」を基にして、

「あなたのグラフは合成関数とその合成関数の逆関数の位置関係が直線 $y=x$ に関して対称になっていないからどこかの過程が違うのではないか」というアドバイスを他者にしていた(図4)。さらに、生徒eは、自身の学習課題が終わった後も、その解決過程を自身で振り返ることで、「底の数値を変更するとその合成関数や逆関数のグラフはどのように変化するか」といった自身で設定した関数に

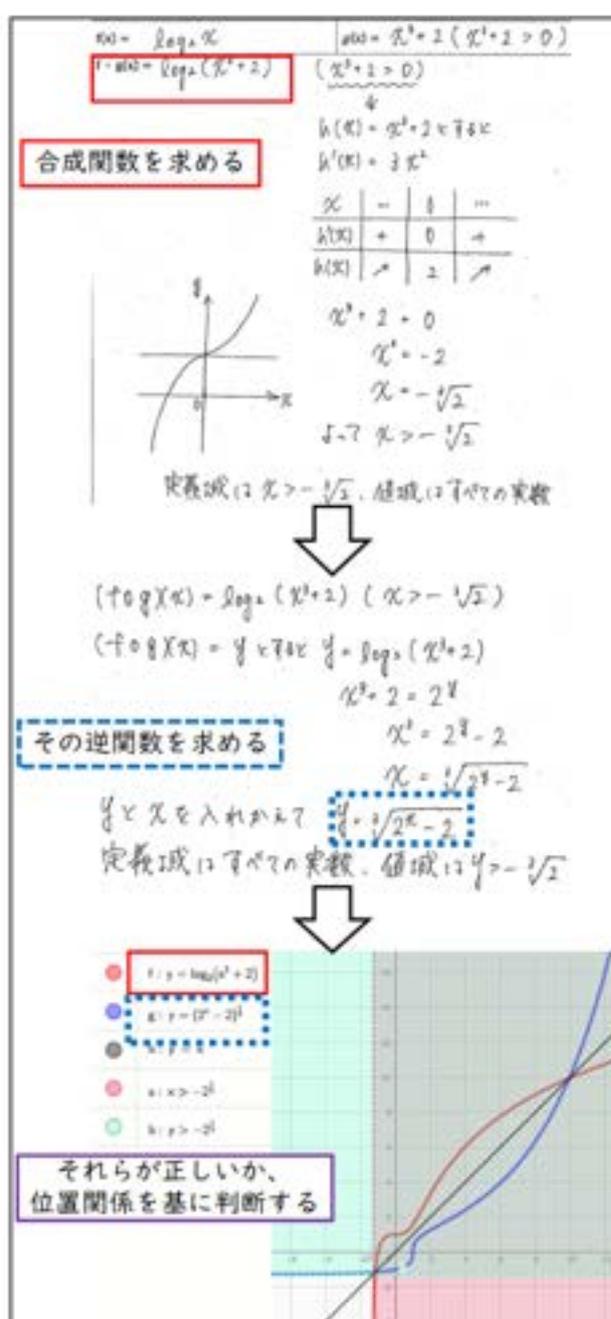


図3 自身で合成関数と逆関数を求め、それらを関数ソフトで表現した生徒dの記述

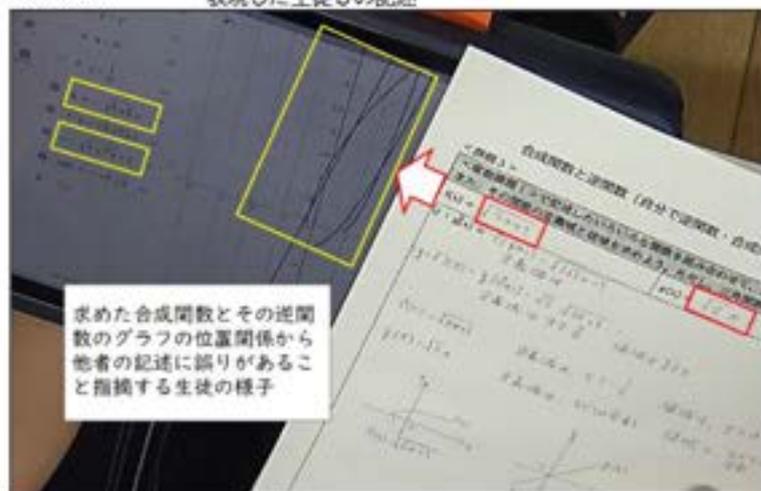


図4 グラフの位置関係を基に他者に誤りがあることを指摘する生徒dの様子

ついて発展的に考察していた(図5)。多くの生徒がこの数学的活動により、立式や定義域、値域が正しいのか考察したり、合成関数とその逆関数のグラフの位置関係について注目したりすることで、合成関数や逆関数の定義や性質を理解することにつながった。

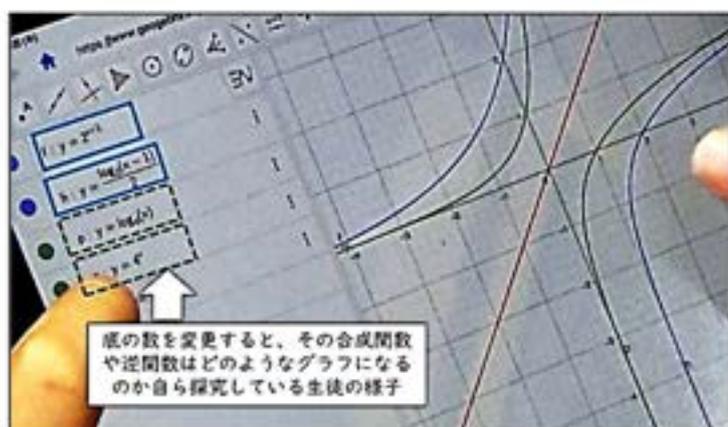


図5 自身で関数の数値を変更して、発展的に考察する生徒eの様子

4 まとめ

(1) 成果

このような数学的活動により、組み合わせる関数を生徒自身で設定することから始まり、合成関数と逆関数を求めた後にそれらが本当に正しいのか、自身のもっている概念、原理や法則を活用して解決過程を振り返るといふ「問題発見・解決の過程」全体を自立的、協働的に遂行することで、合成関数や逆関数の定義や性質について理解を深めることにつながったと考えられる

(2) 課題点とその改善案

第7時の授業において、生徒それぞれで取り組んだ学習課題が違うことから、どのようにして授業をまとめるのかについて更に工夫する必要がある。改善案としては、生徒が今回の授業で得られた知識を確認する共通問題を用意すると、この授業で目指す学習の目標が達成できたか確認できると考えられる。例えば、「今回除いた三角関数について、逆関数は存在するのか考えよ」という学習課題を提示し、生徒に考えさせると、グラフの位置関係や定義域、値域の関係といった生徒が得た学習内容について評価できるのではないかと考える。

参考HP

東京大学C o R E F 「知識構成型ジグソー法」

<http://coref.u-tokyo.ac.jp/>

中村 憲昭「ジグソー法の数学科の授業内における位置付け」

<https://www.saitama-u.ac.jp/edu/grad/master/report/pdf/h-30/012.pdf>