

【数学Ⅲ「無限等比級数」(数研出版 高等学校数学Ⅲ)における 実証授業の指導計画とその授業の実際】

1 はじめに

数学Ⅲ「無限等比級数」(数研出版 高等学校数学Ⅲ)を題材にして、未習の学習内容である学習課題に対して「見通しを立てる」数学的活動を行った。無限等比級数という題材については、無限等比数列から無限級数の流れで学習を進めることから、生徒にとって比較的理解しやすい題材だと推察される。一方、生徒が無限等比級数に関する例題の解答を基に類題を解答することにより、無限等比級数の定義や性質の成り立ちについて理解が深まっておらず、無限等比級数について本質的な理解につながっていないことが考えられる。そこで、この授業では日常生活や社会の事象などを基にした学習課題を通じて、生徒自身で無限等比級数の定義や性質を見いだす数学的活動を行い、この題材について本質的な理解につなげるようにした。

2 指導の計画と方法(指導上の工夫)

(1) 単元の目標

- ・数列の極限について理解し、数列 $\{r^n\}$ の極限などを基に簡単な数列の極限を求めることができる。(知識及び技能)
- ・無限級数の収束、発散について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めることができる。(知識及び技能)
- ・数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対して考察することができる。(思考力、判断力、表現力等)
- ・日常生活や社会の事象または「数学の事象」を数学的に表現し、他者と話し合うことで考察を深めることができる。(学びに向かう力、人間性等)

(2) 評価規準

知識・技能 知	思考・判断・表現 思	主体的に学習に取り組む態度 態
<ul style="list-style-type: none"> ●数列の極限について理解し、数列 $\{r^n\}$ の極限などを基に簡単な数列の極限を求めている。 ●無限級数の収束、発散について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めている。 	<ul style="list-style-type: none"> ●数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりしている。 ●無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対して考察している。 	<ul style="list-style-type: none"> ●事象を関数の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ●問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善しようとしている。

(3) 指導計画(枠内が本研究で扱った学習内容である)

時	学習内容	学習の目標
1	●数列の収束・発散	・数列の収束するときと発散するときの条件について理解し、その条件を基に極限を求めることができる。
2	●はさみうちの原理	・はさみうちの原理を理解し、数列の極限を求めることができる。
3	●無限等比数列の極限	・無限等比数列の極限の性質を学び、それを活用して、数列の極限を求めることができる。
4	●漸化式で表された数列	・漸化式で表された数列の極限を求めることができる
5	●無限級数の収束とその和	・無限級数の収束とその和の定義について理解し、様々な無限級数の和を求めることができる。
6	●無限等比級数の収束・発散	・収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。
7	●無限等比級数の応用	・やや複雑な図形の問題に興味を持ち、無限等比級数を利用しようとする事ができる。 ・循環小数を無限等比級数の和の公式を用いて、分数に直すことができる。
8	●無限級数の性質	・等比数列の実数倍や和・差による無限級数の和を収束条件の確認をして、求めることができる。 ・数列の極限値の性質に気付き、実数倍や和・差による無限級数の和の求めることができる。

(4) 学習の展開例

第6時(無限等比級数の収束・発散)の学習展開例

◎学習の目標

- ・収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。(思考・判断・表現)

時間	◇学習活動 ●主な発問または指示	☆予想される生徒の反応	・指導上の留意事項 ※評価規準
10分	◇今回の授業の目的について理解する。 ●「今回の授業は、皆さんがまだ学習したことのない未知の問題を解決する学習活動を行います。この未知の問題を解決する力は、今社会で求められている力です。すでに解決されている問題については、コンピューターが人間よりも早く正確に解決できるよ		

15分	<p>うになりました。では、今、私たちに求められていることはなんでしょう。それは、コンピューターができないことである、まだ解決されていない未知の問題を解決することです。今回はその未知の問題を解決する力をつけることが目的です」と伝える。</p> <p>◇未習の学習内容である例題を解答する。</p>		
	<p><課題1> コップの水はあふれるのか考えよう。</p> <p>① 200mLのコップに水を100mL入れます。</p> <p>② ①の後に、追加で①で入れた半分の量の水(50mL)を入れます。</p> <p>③ ②の後に、追加で②で入れた半分の量の水(25mL)入れます。</p> <p>②、③のように<u>半分の量の水</u>をどんどんコップに<u>追加して</u>入れていくとコップに入っている水はあふれるのかな。</p>		
	<p>◇予想する</p> <ul style="list-style-type: none"> ●「あふれる」「あふれない」を選んだ生徒にそれぞれなぜなのか聞く。 ●指導者が正解は「あふれない」ことを生徒に伝える。 <p>◇数式で表現する。</p>	<p>☆水がどんどん追加されているから、あふれそう。</p> <p>☆追加する水はどんどん少なくなっているからあふれない。</p>	<p>・「なぜ、水がどんどん追加されているのに、あふれないのだろうか」と伝え、生徒の興味をひきつける。</p>
	<p><課題2> <課題1>について、数学的に表現された式にしよう。</p>		
<ul style="list-style-type: none"> ●<課題1>について、数学化して、立式させる。 ●前時で学んだことを生かすと、この課題が解決できることを伝える。 <p>◇表現した数式を解答する。</p>	<p>☆これは等比数列の和が関係してそう。</p>		
<p><課題3> <課題2>について、数学的に表現された式を解こう。</p>			

15分

- ロイロノートを活用して、生徒の解答を提出させる。
- 生徒の記述を基に、指導者は解説をする。
- ◇自身で無限等比級数の公式を見いだす。

<課題4><課題3>を基に、無限等比数列から作られる無限級数について、きまりを見つけて、自分で公式を見つけよう。

- ◇生徒は、ロイロノートの「資料箱」に入っている「マスめがね」を自身で活用したいとき使う。

・指導者は、生徒が数学的な見方・考え方を働かせられるよう、「マスめがね」をロイロノートの「資料箱」に入れ、生徒がそれぞれで活用できるようにする。

<「マスめがね」による提示>
 ・初項をa、公比をrとして、一般化して考えてみよう。
 ・公比の数値を変えると、無限級数はどのように変わるのかな。

- ◇生徒は、学習の道しるべとしてループリックを活用する。

・ループリックを活用して、問題を作成する上での達成基準を示す。

【改善案】
 ・「一般化」と「具体化」が相互に関連付けられるように、「マスめがね」を一部変更するとよい(p.9の図3参照)。

<ループリック>

A	B	C	D
無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえて記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式を記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式を見つけようとした。

- ◇できた生徒については、自身の解答をループリックを基に自己評価し、ロイロノートの「提出」を活用して、解答を提出する。

※**思**
 収束条件に留意し、自身で無限等比級数の和の公式を求めることができる。

10 分	<p>◇授業のまとめをする。</p> <ul style="list-style-type: none"> ●無限等比級数について、生徒の記述を基に、解説する。 ●「今回の授業では、自分の力で公式やきまりを見いだして、問題を解決することができました。実はこのような未知の問題に対して、自分たちで試行錯誤しながら解決する力はいま社会で求められている力です。今日は、こんな力を身につける授業を行いました」と伝える。 		
---------	---	--	--

準備物

- ・ 1人1台端末・大型提示装置

数列の極限（自分で公式を見いだそう）

<課題1>

問題：コップの水はあふれるのか予想しよう。

- ① 200ml のコップの半分、水を入れます。
 - ② ①の後に、追加で①で入れた量の半分の水を入れます。
 - ③ ①②の後に、追加で②で入れた量の半分の水を入れます。
- ②③のように水をどんどん追加してコップに入れるとコップに入っている水はあふれるのかな。

あなたが予想した方に○をつけよう

あふれる ・ あふれない

簡潔に理由をかこう

【理由】

<課題2>

<課題1>について、数学的に表現された式にしよう。

<課題3>

<課題2>について、数学的に表現された式を解こう。

<課題4>

<課題3>を基に、無限等比数列から作られる無限級数について、きまりを見つけて、自分で公式を見いだそう。

ループリックを見て、自分の達成基準を決めよう！

A	B	C	D
無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式について、条件を踏まえて記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式を記述した。	無限等比数列から作られる無限級数についての公式を見いだそうとした。

・私の達成基準は（ ）です。

(5) 指導上の工夫について(第6時)

本授業の指導の工夫として、2点ある。1点目は、日常生活や社会の事象を基にした学習課題を基にすることで、生徒のこの題材についての興味・関心を引き出し、生徒がこの学習課題について解決したいと思える必要性を感じさせるようにしたことである。探究的な学びを進める際には、生徒が主体的に取り組みたいと思える仕掛けが大切である。そこで、<課題1>のような今までの経験から予想すると「コップの水があふれる」という生徒の予想と、「あふれない」という数学的な解答との差異を基に、学習課題を設定することで、生徒はこの課題を解決したいと思い、主体的に数学的活動を進めることができる。2点目は、問題を解くのではなく、定義や性質について考察を深めることを重視した点である。高等学校数学科における授業では、「定義や性質についての説明」→「例題の解説」→「類題を解答する」といった一連の流れが多いと考える。この一連の流れにより、生徒が定義や性質についての理解より、問題を解答することを重視することにつながると推察される。そこで、本授業ではこの一連の流れを、「日常生活や社会の事象といった具体的な問題を自身で解答する」→「一般的にその解法が成り立つのか、自身で定義や性質について見いだす」といった学習の流れにすることで、定義や性質についての理解をより深められるようにする。

3 授業の実際(第6時)

授業の冒頭で、「<課題1>コップの水はあふれるのか」について、生徒が予想すると、約半数の生徒が「コップの水はあふれる」と回答していた。その理由として、「 $100+50+25+\dots$ のように無限に足し算ができるから」や「追加する水の量が0になることはないため、いつかあふれる」と回答する生徒が多かった。一方、あふれないと回答した生徒については「追加する水の量がどんどん減っていくから」や「追加する水の量が収束するから」といった回答が見られた。生徒が予想した後、その理由について話し合う際には、「あふれる」と回答した生徒も「あふれない」と回答した生徒もそれがなぜなのかについて疑問をもつことにつながった。指導者は、結果として「あふれない」ことを伝え、それがなぜなのかについて数学的に考えてみようと言った。生徒は以前に学習した無限等比数列から、この学習課題は無限等比数列に関係しているのではないかと考え、自身のもつ知識や技能を活用して、立式することができた。その後、その立式した数式を解き、コップの水はあふれないことを理解することにつながった。この後、指導者はこの立式した数式が一般的にはどのようなことがいえるのかについて考察してみようということから、生徒は自身でその公式の一般化について考察した。ここで

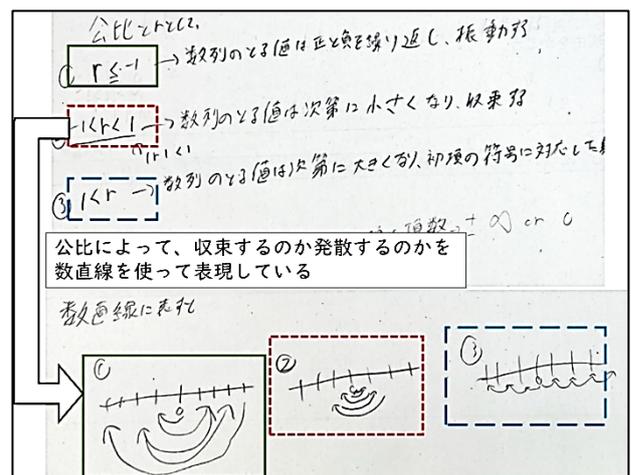


図1 ルーブリックを基に自分なりの表現をした生徒aの記述

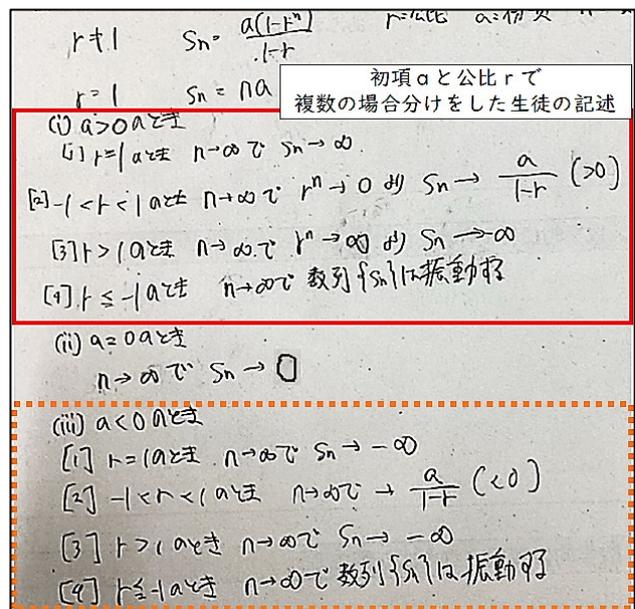


図2 試行錯誤しながら無限等比級数についての何層にも場合分けをして考察した生徒bの記述

は、グループで協議しながら学習を進めた。生徒 a は、ループリックの A 評価である「無限等比数列から作られる無限級数の公式について、条件を踏まえながら、自分なりの根拠を基に記述できた」を確認しながら、単に公式を導くだけでなく、数直線を用いて収束するのか発散するのかを自分なりに表現して、その学習において本質的な理解につなげようとする記述をした(図1)。また、教科書等では無限等比級数の公式について「収束する」「発散する」としか記載していないことから、無限等比級数の公式について生徒の考察を深める機会がなかなかないが、生徒 b は初項 a と公比 r のそれぞれで場合分けを複数して、今まで学習してきた「正に発散する」「負に発散する」「振動する」などで表現をした(図2)。

4 まとめ

(1) 成果

このような数学的活動により、生徒は自身で無限等比級数の公式を見いだそうとすることで、新たな概念、原理や法則を自身で獲得することにつながった。

(2) 課題点とその改善案

課題点は2点ある。1点目は、生徒がそもそも数列についての理解がどの程度あるのかということについてである。この授業では、一部の生徒が数学Bで学習する等比数列の和についての知識についてしっかりと定着していなかった。そのため、今回の学習内容について立式することがそもそも困難に感じている様子が見られた。改善案としては、生徒の状態に応じて、生徒同士で協議する時間を取ったり指導者による解説を長めにとったりして生徒の既習の学習内容である数列に関して振り返りをする時間が必要であったと考える。

2点目は、一般化した式と具体化した式を関連付けることについてである。この一般化した式と具体化した式を相互に関連付けることを生徒自身ができるようになることこの学習内容だけでなく、数学におけるすべての学習内容に活用できる重要な考え方を得ることにつながる。今回の授業では、「コップの水はあふれるのか」について具体的な数値を活用して学習を進めたが、公式について生徒自身で見いだす場面になると、一部の生徒はそれまで取り組んできた具体化した式を活用することなく、まったくの別物として一般化した公式を見いだそうとしていた。この一般化した式と具体化した式を相互に関連付けるような工夫が必要であると考えたことから、改善案として図3のように「マスめがね」を活用したいと考える。これを活用することで「コップの水を最初に50mL入れるとどうなるのかな」や「他の事象においてもこの式は成り立つのか」といった初項や公比についての場合分けのイメージをもつことにつながり、一般化した式と具体化した式を相互に関連付ける一助となるのではないかと考える。

【改善案】

<「マスめがね」による提示>

- ・初項を a 、公比を r として、一般化して考えてみよう。
- ・コップの水を最初に50mL入れるように変更したり追加で入れる水の量を2倍にしたりするなど、初項や公比の数値を変えると、無限級数はどのように変わるかな。

図3 「マスめがね」の改善案